Subject ریاضی عمومی ۱ Date ۱۴۰۴/۷/۲۸

فصل ۱: تابع

تابع نمایی: برای هر عدد حقیقی ثابت $a>0$ و $a\neq 1$ تابع زیر یک تابع نمایی نامیده می شود.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a^x$$

لذا در انتخاب x در این رابطه هیچ محدودیتی وجود ندارد یعنی در واقع دامنه شما کل اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) می تواند باشد. بنابراین دامنه تابع کل اعداد حقیقی را شامل می شود.

یکی دیگر از ویژگی های تابع نمایی این است که ما عدد حقیقی ($\mathbb{R}$) را مثبت در نظر گرفتیم باز هم هم مثبت می شود.

خواص تابع نمایی

۱) $\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x > 0$

۲) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

۳) $a^{x+y} = a^x a^y$

۴) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^{3-3} = \dfrac{\cancel{a^3}^{\,1}}{\cancel{a^3}_{\,1}} = \dfrac{1}{1} = 1$

۵) $(a^x)^y = a^{xy}$

(1) $0<a<1 \qquad y=a^x$

AFAGH

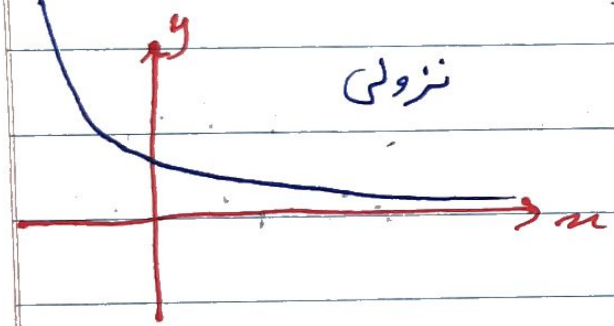
(2) $a>1 \qquad y=a^x$

زمانی که a بین ۰ تا ۱ است تابع $y=a^x$ یک تابع نزولی می‌باشد بطور مثال اگر a را یک عدد از ۰ تا ۲ درنظر بگیریم مثلاً $\frac{1}{2}$ در اینصورت هرچقدر $y=a^x$ توان اگر بیشتر بشود a^x کوچکتر می‌شود.

همانطور که مشاهده شده با افزایش توان تابع کوچک می‌شود پس در اینصورت

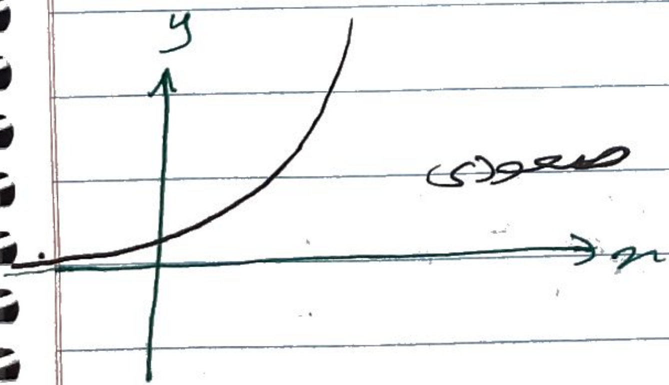
$$\text{if } x \to +\infty \quad y \to 0$$

$$\text{if } x \to -\infty \quad y \to +\infty$$



$$\text{if } x \to +\infty \quad y \to +\infty$$

$$\text{if } x \to -\infty \quad y \to 0$$



حالت دوم زمانی رخ می دهد که $a>1$ باشد در اینصورت به وضوح روشن است که هرچقدر x بزرگتر می شود تابع $y=a^x$ هم بزرگتر می شود بنابراین یک تابع صعودی داریم که باز هم از نقطه ۱ عبور می کند.

$a=e$ $y=e^x$

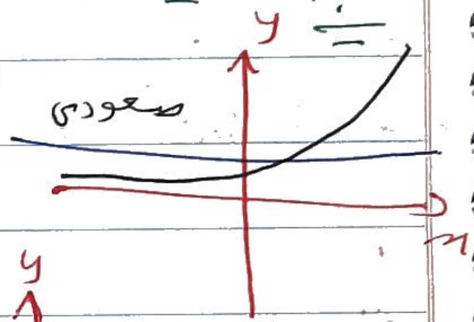
۲.۷۱۸

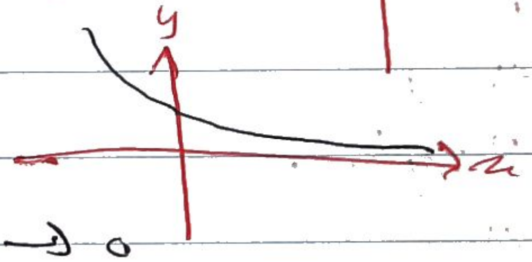
درحالت خاص اگر $a=e$ درنظر بگیریم e یک عدد ثابت نیز در ریاضیات شناخته می شود.

$y=e^x$

if $x\to+\infty$ $y\to+\infty$

if $x\to-\infty$ $y\to 0$





$y=e^{-x}$

if $x\to+\infty$ $y\to 0$

if $x\to-\infty$ $y\to+\infty$

اگر دقت کنیم تابع نمایی که داشتیم یک نوع تابع یک به یک است یعنی اگر از روی نمودار بخواهیم بگوییم هر خطی که موازی محور x ها رسم شود نمودار تابع ما را فقط در یک نقطه قطع می کند.

تابع هایی که یک به یک بوده اند حتماً وارون داشته اند لذا وارون تابع نمایی را تحت تابع لگاریتم می شناسیم.

تابع لگاریتمی: برای هر عدد حقیقی ثابت $a>0$ و $a\neq 1$ تابع زیر را یک تابع لگاریتمی در مبنای a می‌گوییم که دامنه کل اعداد حقیقی مثبت و برد کل اعداد حقیقی مثبت

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad a>0$$

$$f(x) = \log_a x$$

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

$$\log_2 8 = ? \qquad 8 = 2^3$$

خواص تابع لگاریتمی: لگاریتم اعداد منفی و صفر تعریف نشده است

1)

2) $\log_a a = 1$

3) $\log_a 1 = 0$

4) $a^{\log_a x} = x$

5) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

6) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

7) $\log_a x^n = n \log_a x$

8) $\log_a x \times \log_x a = 1$

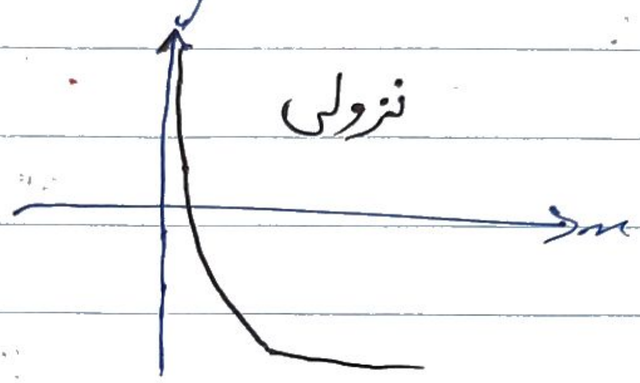
9) $\log_y x = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$

نمودار تابع لگاریتمی در مبنای a :

از آنجایی که تابع لگاریتمی وارون تابع نمایی است. پس

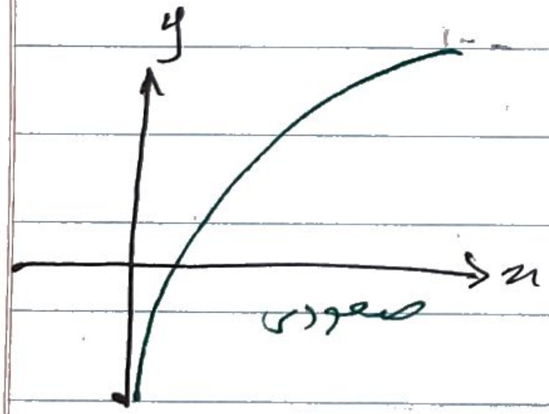
$y=\log_a^x \Leftrightarrow x=a^y$ $\qquad 0<a<1$

$y=\log_a^x$



if $x\to+\infty$ $\quad y\to-\infty$

if $x\to 0^+$ $\quad y\to+\infty$



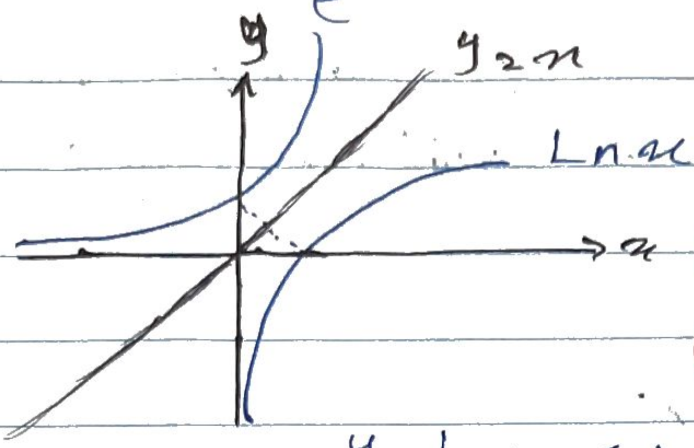
$a>1$

if $x\to+\infty$ $\quad y\to+\infty$

if $x\to 0^+$ $\quad y\to-\infty$

در حالت خاص اگر در تابع لگاریتمی $a=e$ داریم تابع لگاریتم طبیعی خواهیم داشت $y=\log_e^x=\ln x$ چون e مبنای log بزرگتر از ۱ است پس تابع ما صعودی است.

Subject ______ Date ______



① $x \to +\infty \quad Ln\,x \to +\infty$

② $x \to 0^+ \quad Ln\,x \to -\infty$

③ $x > 1 \quad Ln\,x > 0$

④ $0 < x < 1 \quad Ln\,x < 0$

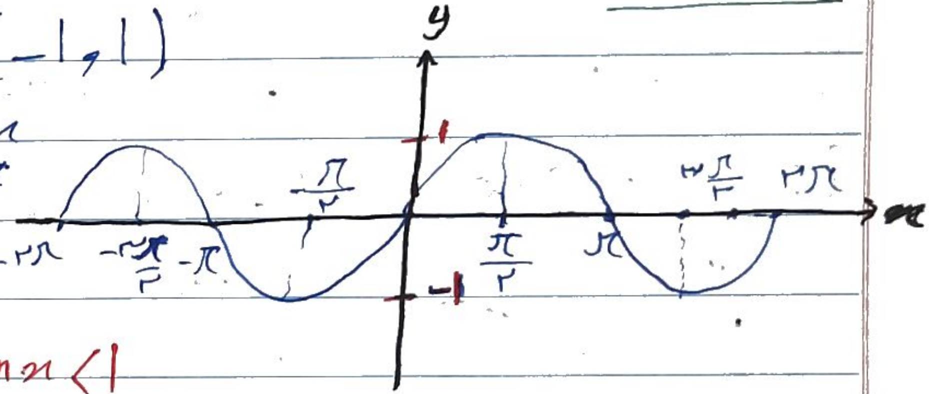
$$y = Ln\,x \Longleftrightarrow x = e^y$$

(۱۴۰۴/۸/۰۵)

تابع sin

$f: \mathbb{R} \to [-1,1]$

$f(x) = \sin x$



$\forall x \quad -1 \leq \sin x \leq 1$

تابع سینوس (sin) تابع فرد است.
ونسبت به مبدأ دارای تقارن است.

$\forall x \quad \sin(-x) = -\sin x$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta$ $\qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta$

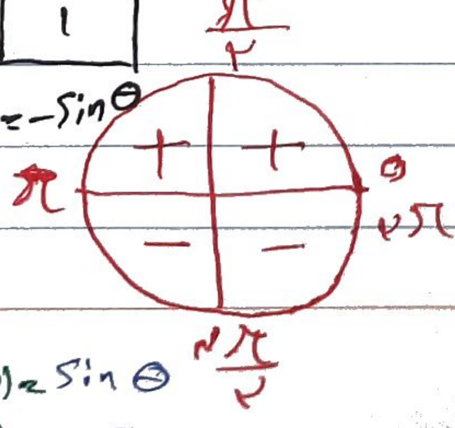
$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

$\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cos\theta$

$\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\cos\theta$



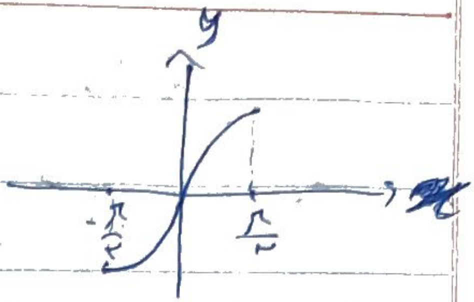
$\sin(2\pi + \theta) = \sin\theta$

$\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$

Subject .... Date

$g: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] , [-1,1]$

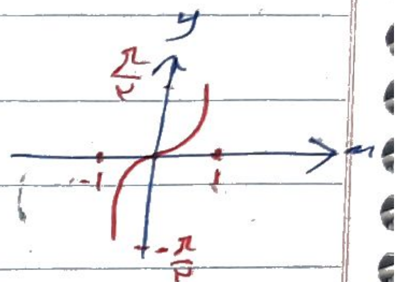
$g(x) = \sin x$



وارون تابع g را با $\arcsin x = \sin^{-1} x$

$g^{-1}: [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$g^{-1}(x) = \arcsin x = \sin^{-1} x$



$y = \sin^{-1} x \Longleftrightarrow x = \sin y$

$\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$

$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$

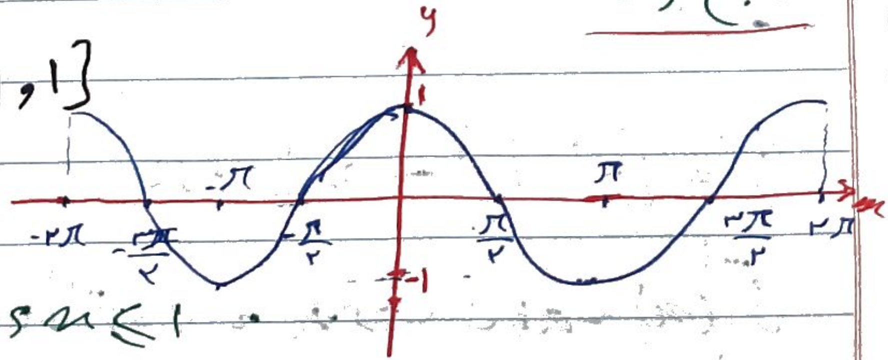
$\arcsin(\frac{1}{2}) = 30^\circ$

تابع cos نسبت به محور y دارای تقارن است.

تابع cos

$f: \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$

$f(x) = \cos x$



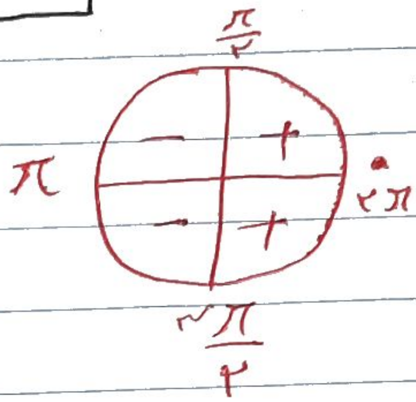
$\forall x: -1 \leq \cos x \leq 1$

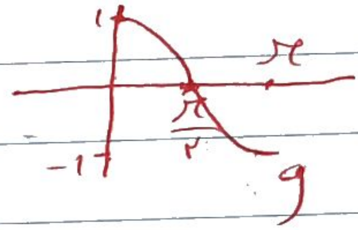
$\forall x \; \cos(-x) = \cos x$

Subject Date

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$
$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$
$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$$
$$\cos(2\pi+\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$

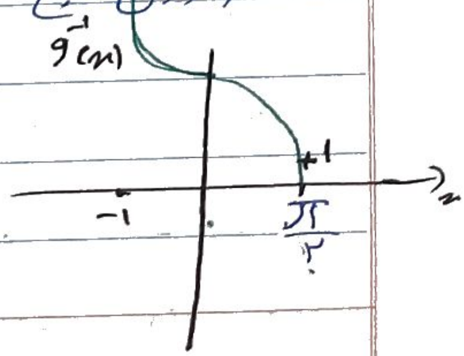




$$g:[0,\pi]\longrightarrow[-1,1]$$
$$g(x)=\cos x$$

وارون تابع g را با $\arccos x$ یا $\cos^{-1}x$

$$g^{-1}=[-1,1]\longrightarrow[0,\pi]$$
$$g^{-1}(x)=\arccos x=\cos^{-1}x$$



$$y=\cos^{-1}x \iff x=\cos y$$

AFAGH

$$\cos^{-1}x\neq\frac{1}{\cos x}$$

تابع tan

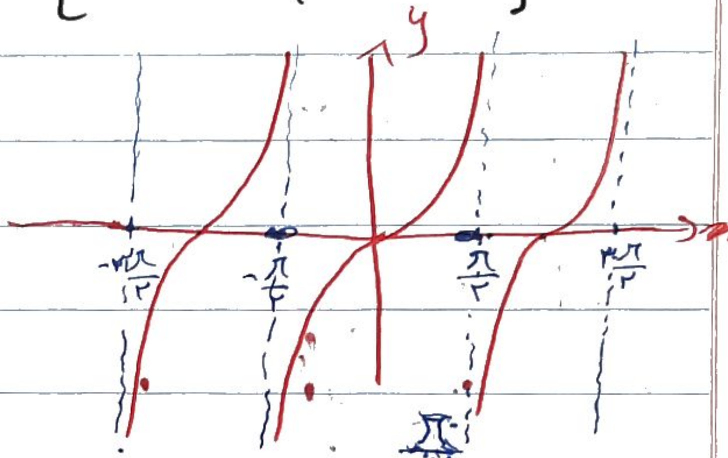
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\frac{k\pi}{2}$ ، k فرد

$$D_f : \mathbb{R} - \{x \mid \cos x = 0\}$$

$$f : \mathbb{R} - \{x \mid x = \frac{k\pi}{2} ,\ k \text{ عدد صحیح فرد}\} \to \mathbb{R}$$

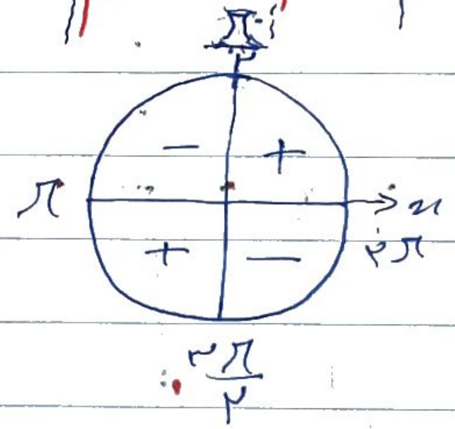
$$f(x) = \tan(x)$$



θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\cot\theta$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cot\theta$$
$$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$$
$$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$$
$$\tan(\frac{3\pi}{2}+\theta) = -\cot\theta$$
$$\tan(\frac{3\pi}{2}-\theta) = \cot\theta$$
$$\tan(2\pi+\theta) = \tan\theta$$
$$\tan(2\pi-\theta) = -\tan\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$



$$g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \tan x$$

$$g^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$
$$g^{-1}(x) = \arctan x = \tan^{-1} x$$

$$y = \tan^{-1} x \iff x = \tan y$$

$$\tan^{-1} x \neq \frac{1}{\tan x}$$

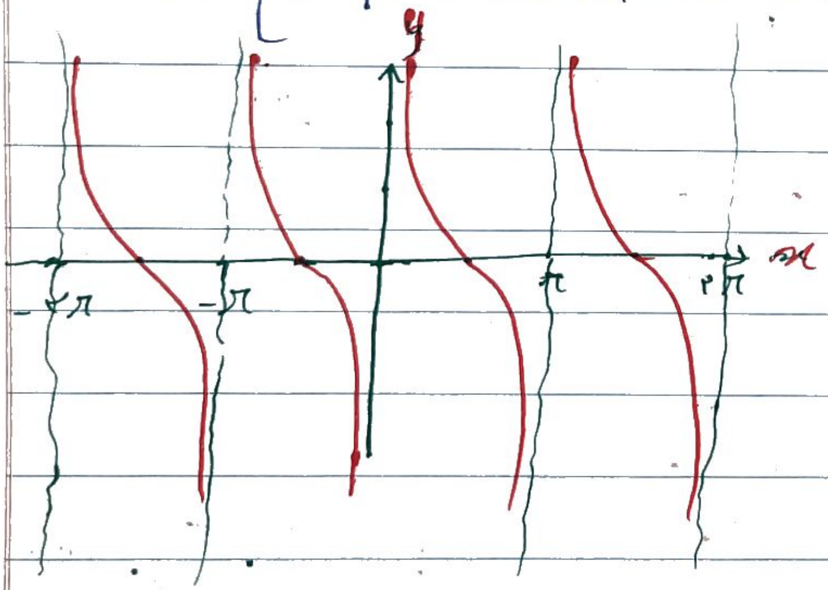
تابع Cot

$$\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$$

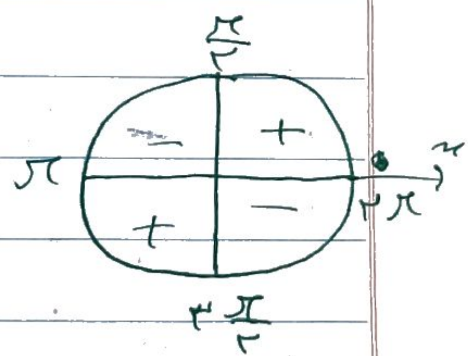
$$\{x \mid x = k\pi ,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$f: \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi\ \ k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$



تابع فرد است

$$\cot(-x) = -\cot x$$



θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cot\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Subject .... Date

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$$

$$\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$$

$$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$$

$$\cot(2\pi+\theta)=\cot\theta$$

$$\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$$

$$\cot(-\theta)=-\cot\theta$$

تابع csc (کسکانت)

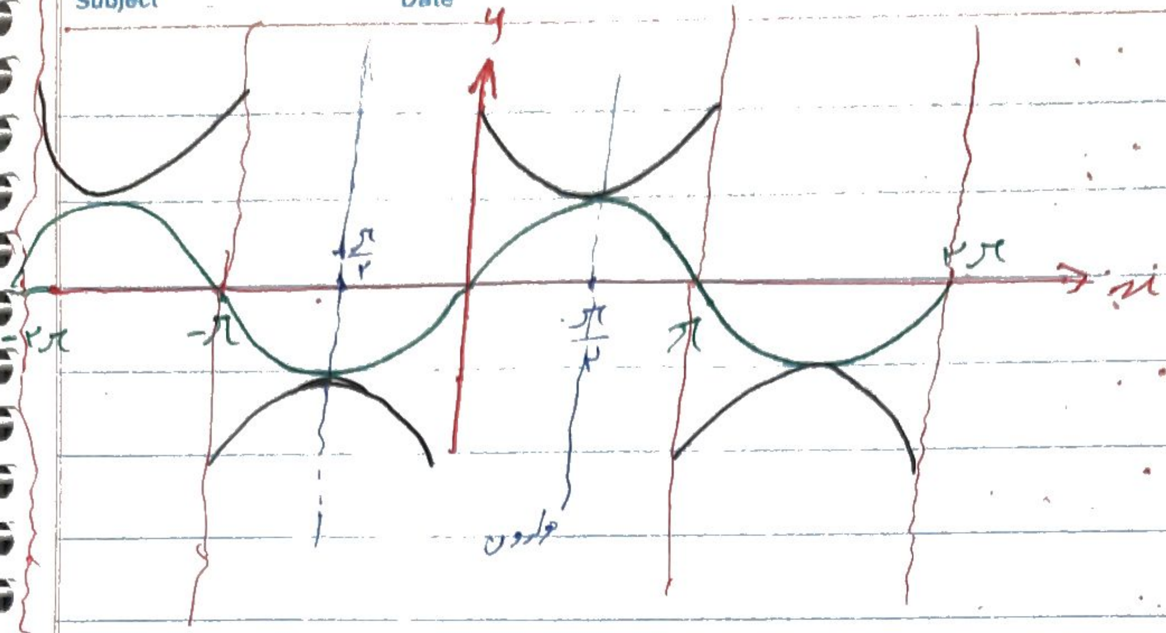
$$\csc x=\frac{1}{\sin x}$$

$$f:\mathbb{R}-\{x \mid x=k\pi ,\ k\in\mathbb{Z}\}\rightarrow\mathbb{R}-(-1,1)$$

$$\forall x \quad -1\leq\sin x\leq 1$$

$$\csc\geq 1 \ , \ \csc\leq -1$$

Subject Date

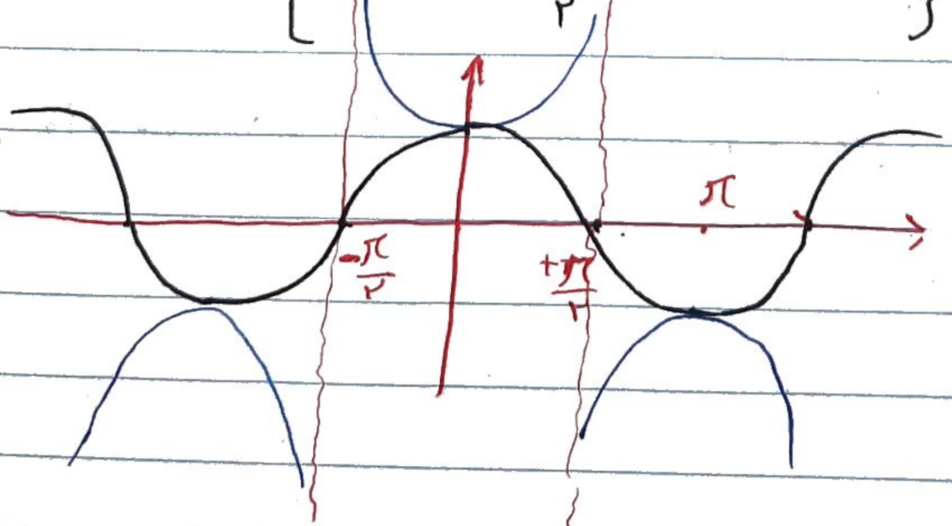


$$\csc(-x) = -\csc x$$

تابع sec (سکانت)

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$f: \mathbb{R} - \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{2} \ , k \text{ عدد صحیح فرد} \right\} \to \mathbb{R} - (-1,1)$$



Subject ____________ Date ________

۱) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

۲) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

۳) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

۴) $1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

۵) $1 + \cot^2 x = \csc^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

۶) $\tan x \cot x = 1$

۷) $\cos x = \dfrac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$

۸) $\sin x = \dfrac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$

۹) $\tan x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}$

۱۰) $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

۱۱) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

مثال ۱) $\cos(\underbrace{\arcsin\frac{3}{5}}_{x}) = ?$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$y = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin y$ $\quad \frac{3}{5} = \sin x$

۱) $\cos x$

$\sqrt{\frac{25}{25} - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ $\quad \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\arcsin\frac{3}{5} = \sin^{-1}\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3}{5} = \sin x$ $\quad \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ $\quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

$\cos x = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} =$, $\cos x = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \sqrt{\frac{16}{25}}$

Subject .... Date ۱۴۰۴/۸/۱۲

مثال

$$\tan\left(\arcsin\left(-\frac{۳}{۴}\right)\right)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$y = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin y \qquad \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

$$\left(-\frac{۳}{۴}\right)^2$$

$$y = \sin^{-1}\left(-\frac{۳}{۴}\right) \Rightarrow -\frac{۳}{۴} = \sin y$$

$$\tan y = -\frac{۳}{\sqrt{۷}}$$

اعداد مختلط:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0$$

$$\Delta = 0$$

$$\Delta < 0$$

در حل معادله ۲ به روش دلتا
سه حالت ممکن بود اتفاق
بیفتد. حالت اول زمانی رخ می‌دهد که
دلتا بزرگتر از صفر باشد در این صورت
معادله دو ریشه حقیقی و متمایز دارد
حالت ۲ زمانی رخ می‌دهد که دلتا برابر با
صفر باشد در این صورت معادله یک
ریشه مضاعف دارد. حالت سه زمانی رخ
می‌داد که دلتا کوچکتر از صفر باشد در این
حالت می‌گفتیم معادله جواب ندارد

در حالت سه این پاسخ‌های فرضی بیان می‌شد که ما اعداد مختلط
بلد نبودیم در ~~حقیقت~~ زمانی که دلتا کوچکتر از صفر است همین
معادله دارای جواب بوده و جواب آن اعداد مختلط بوده است.

حقیقی   موهومی

$Z = x + iy$

اعداد حقیقی :
تقریباً هر عددی که به ذهنتان
برسد یک عدد حقیقی است به طور خلاصه اعداد حقیقی
شامل اعداد صحیح، گویا و گنگ هستند

اعداد موهومی : دسته ویژه‌ای از اعداد هستند چون اگر
این اعداد را به توان ۲ برسانیم برخلاف اعداد صحیح حاصل
توان یک عدد منفی خواهد بود.

$i = \sqrt{-1}$

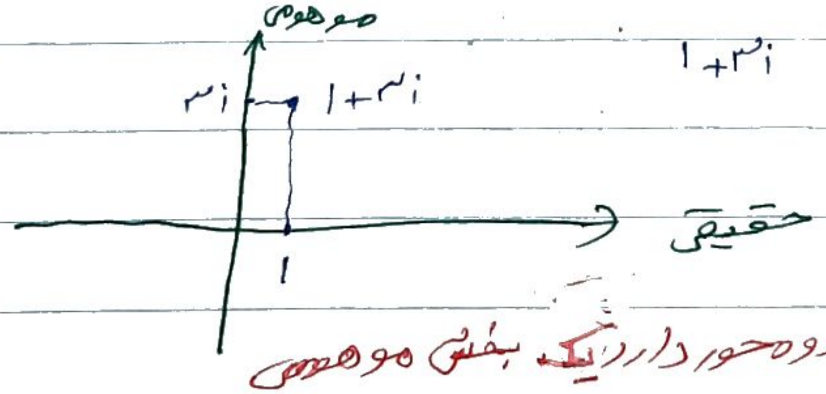
$i^2 = -1$

۱i و ۲۵i و $\sqrt{3}\,i$ و

-۰/۸i و ۱۹۹۶i

$Z = 1+3i$ و $2-3i$ و $3i$ و $5+0i$

نکته* هر یک از اعداد تشکیل دهنده اعداد مختلط می‌توانند صفر باشند



۱+۳i

صفحه مختصات دو محور دارد یک بخش موهومی
اعداد مختلط روی محور عمودی و بخش حقیقی اعداد مختلط
روی محور افقی.

Subject Date

تعریف اعداد مختلط

$$\mathbb{C}=\{Z=x+iy \mid x,y\in\mathbb{R},\ i=\sqrt{-1}\}$$

حقیقی موهومی

$Re(Z)$ $Im(Z)$

فرض کنید $Z=x+iy$ اعداد مختلط دلخواهی باشند در اینصورت x را قسمت حقیقی Z نامیده و با نماد $Re(Z)$ نمایش می دهیم و همچنین y را قسمت موهومی Z نامیده و با نماد $Im(Z)$ نمایش می دهیم.

مثال

$Z=2-3i$

$Re(Z)=2$ $Im(Z)=-3$

مثال

$Z=0+3i$ $Re(Z)=0$

$Im(Z)=3$

مثال

$Z=5+0i$ $Re(Z)=5$ $Im(Z)=0$

فرض کنید $Z_1 = x_1 + iy_1$ و $Z_2 = x_2 + iy_2$ دو عدد مختلط دلخواه باشند در اینصورت عملیات ضرب و جمع و تفاضل دو عدد مختلط به صورت زیر تعریف می شود.

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + \overset{-1}{i^2} y_1 y_2$$

$$Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

مثال

(1) $(5 + 7i) + (-2 - 3i) = 3 + 4i$

(2) $(5 + 7i) + (-2 - 3i) = 7 + 10i$

(3) $0 + 5i(3i + 2) = -15 - 10i$

(4) $(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = 0 + 2i$

تساوی دو عدد مختلط: فرض کنید دو عدد مختلط $Z_1 = x_1 + iy_1$ و $Z_2 = x_2 + iy_2$ مساوی گوییم هرگاه قسمت حقیقی باهم برابر و قسمت های موهومی باهم برابر باشد در اینصورت قسمت های Z_1 و Z_2 با هم برابرند.

$$\underbrace{x_1 = x_2}_{\text{حقیقی}} \quad \text{و} \quad \left.\underbrace{y_1 = y_2}_{\text{موهومی}}\right\} \rightarrow Z_1 = Z_2$$

Subject Date

خواص اعداد مختلط: اگر z_1 و z_2 و z_3 سه عدد مختلط دلخواه باشند آنگاه داریم

۱) $z_1+z_2=z_2+z_1$

۲) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$

۳) $z_1+0=z_1$

۴) $z_1+(-z_1)=(-z_1)+z_1=0$

۵) $z_1z_2=z_2z_1$

۶) $z(z_2z_3)=(zz_2)z_3$

۷) $z_1\cdot 1=z_1$

نکته: تمامی اتحاد های جبری برای اعداد مختلط برقرار می باشد یعنی اگر w و z دو عدد مختلط دلخواه باشند آنگاه داریم

۱) $(z+w)^2=z^2+w^2+2zw$

۲) $(z-w)^2=z^2+w^2-2zw$

۳) $(z-w)(z+w)=z^2-w^2$

۴) $(z+w)^3=z^3+3z^2w+3zw^2+w^3$

۵) $(z-w)^3=z^3-3z^2w+3zw^2-w^3$

Subject .... Date

مثال

1) $(2-i)^2 = (2-i)(2-i) = 3-4i$

2) $(3i-2)^3 = 46+9i$

$i^3 = i^2 \cdot i$

$\underbrace{i^2}_{-1}$

مزدوج اعداد مختلط: یکی دیگر از مفاهیمی که می توان درباره اعداد مختلط می توان تعریف کرد مزدوج اعداد مختلط است که بسیار پر کاربرد نیز می باشد فرض کنید $z = x+iy$ یک عدد مختلط دلخواه باشد آنگاه مزدوج z را با نماد $\bar{z}$ نمایش می دهند و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$\bar{z} = x+iy$

پس قسمت حقیقی را نوشته و قسمت موهومی هرچه هست عیناً قرینه می شود.

مثال

1) $1+3i \rightarrow \bar{z} = 1-3i$

2) $z = 5i \rightarrow \bar{z} = -5i$

3) $z = 5 \rightarrow \bar{z} = 5$

نکته * مزدوج مزدوج هر عدد مختلط خود آن عدد می شود.

ویژگی های مزدوج اعداد مختلط:

1) $\overline{\overline{z}} = z_1$

2) $z_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{z_1} = z_1$

3) $\overline{(z_1+z_2)} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$

4) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

5) $\overline{\alpha z_1} = \alpha\, \overline{z_1}$

6) $(\overline{z_1})^n = \overline{z_1^n}$

7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

8) $Im(\overline{z}) = -Im(z)$

$Re(\overline{z}) = Re(z)$

9) $z+\overline{z} = 2Re(z)$

10) $z-\overline{z} = 2Im(z)$

مثال: اگر $z=2+3i$ باشد آنگاه $z+\overline{z}$ و $z-\overline{z}$ را بدست آورید.

$z+\overline{z} = 2\times(2) = 4$

$z-\overline{z} = 2(3i) = 6i$

Subject   Date ۴۰۳/۸/۱۹

وارون اعداد مختلط:

فرض کنید $z=x+iy$ یک عدد مختلط ناصفر باشد و در اینصورت وارون z را با نماد $z^{-1}=\frac{1}{z}$ نمایش می دهیم.

رابطه وارون اعداد مختلط

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

مثال) $z=\sqrt{3}+i$

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{\sqrt{3}+i}\times\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{3}-i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{i}{4}$$

تقسیم اعداد مختلط

فرض کنید $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$ دو عدد مختلط باشند در اینصورت خارج قسمت دو عدد مختلط را با نماد $\frac{z_1}{z_2}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\times(z_2^{-1})=z_1\times\frac{1}{z_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\times\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}=\frac{x_1x_2-iy_2x_1+iy_1x_2-i^2y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{(y_1x_2-y_2x_1)}{x_2^2+y_2^2}$$

مثال

$$۱)\ \frac{۳-۲i}{-۱+i}\times\frac{-۱-i}{-۱-i}=\frac{-۵-i}{۱+۱}=\frac{-۵}{۲}-\frac{i}{۲}$$

$$۲)\ \frac{۲+۳i}{۴-۵i}\times\frac{۴+۵i}{۴+۵i}=\frac{-۷}{۴۱}+\frac{۲۲i}{۴۱}$$

مزدوج

$$۳)\ \frac{۱-۲i}{\sqrt{۳}\,i+۱}\times\frac{-\sqrt{۳}+۱}{-\sqrt{۳}+۱}=\left(\frac{۱}{۴}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)-i\left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}+\frac{۱}{۲}\right)$$

$$۴)\ \frac{۵+۲i}{۳-i}\times\frac{۳+i}{۳+i}=\frac{۱۱}{۱۰}+i\,\frac{۱۷}{۱۰}$$

$$۵)\ Z=\frac{\sqrt{۱+x^۲}+ix}{x-i\sqrt{۱+x^۲}}\times\frac{x+i\sqrt{۱+x^۲}}{x+i\sqrt{۱+x^۲}}$$

$$x^۲+\cancel{ix\sqrt{۱+x^۲}}-\cancel{xi\sqrt{۱+x^۲}}+\underbrace{i^۲}_{-۱}(۱+x^۲)$$

$$\frac{\cancel{x\sqrt{۱+x^۲}}+i(۱+x^۲)+ix^۲+\underbrace{i^۲}_{-۱}\cancel{x\sqrt{۱+x^۲}}}{x^۲+(۱+x^۲)=۱+۲x^۲}=\frac{i\,\cancel{(۱+۲x^۲)}}{\cancel{۱+۲x^۲}}=i$$

توان در اعداد مختلط

$Z^۲=Z\cdot Z \qquad Z^۳=Z^۲\cdot Z$

مفهوم توان در اعداد مختلط دقیقاً همان مفهومی است که در اعداد حقیقی داشتیم لذا $Z^۲=ZZ$ به این معنا است که Z را به Z ضرب کنیم یا $Z^۳=ZZZ$ به این معناست که Z را سه بار در خودش ضرب می‌کنیم.

Subject Date

$i^{۲۷} = i^{۲۴} \cdot \underbrace{i^{۳}}_{-i} = -i$

$$\begin{array}{r|l} ۲۷ & ۴ \\ ۲۴ & ۶ \\ \hline ۳ & \end{array}$$

$i = \sqrt{-۱}$

$i^{۲} = -۱$

$i^{۳} = \underbrace{i^{۲}}_{-۱} \cdot i = -i$

$i^{۴} = \underbrace{i^{۳}}_{-i} \cdot i = \underbrace{(-i^{۲})}_{-۱} = ۱$

$i^{۵} = \underbrace{i^{۴}}_{۱} \times i = i$

$i^{۶} = i^{۵} \cdot i = -۱$

$i^{۷} = \underbrace{i^{۶}}_{-۱} \cdot i = -i$

$i^{۸} = \underbrace{i^{۷}}_{-i} \cdot i = \underbrace{-i^{۲}}_{-۱} = ۱$

$i^{۵۰} = -۱$ $\qquad$ $i^{۴۰} = ۱$

$$Z = \frac{(۱+۲i)^{۲} + i^{۳۳}}{\sqrt{۲} + i^{۲۵}} = \frac{-۳+۵i}{\sqrt{۲}+i} \times \frac{\sqrt{۲}-i}{\sqrt{۲}-i} = \left(\frac{۵}{۳} - \sqrt{۲}\right) + i\left(۱ + \frac{۵\sqrt{۲}}{۳}\right)$$

$i^{۳۳} = i$

$i^{۲۵} = i$

$(۱+۲i)(۱+۲i) = -۳+۴i$

$۱ + ۲i + ۲i + ۴i^{۲} \ldots -۳+۴i$

$$Z = \frac{i^{80} - i + 1}{i^{4} + i} = \frac{2 - i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{1}{2} - i\frac{3}{2}$$

اندازه اعداد مختلط:

فرض کنید $Z = x + iy$ عدد مختلط دلخواهی باشد در اینصورت هنگ یا قدر مطلق Z را با نماد $|Z|$ اندازه Z نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \longrightarrow |Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}}$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \Rightarrow |Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}}$$

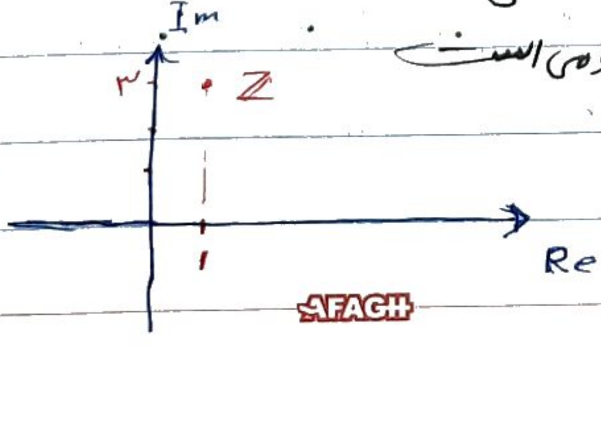
$$|Z| = |\bar{Z}| = |-Z|$$

نمایش در صفحه مختلط:

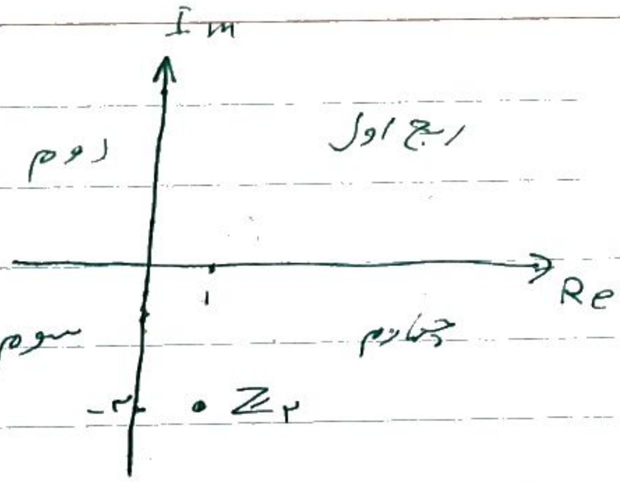
صفحه مختلط صفحی است که محور حقیقی افقیش و محور عمودی موهومی است

مثال

$Z = 1 + 3i$



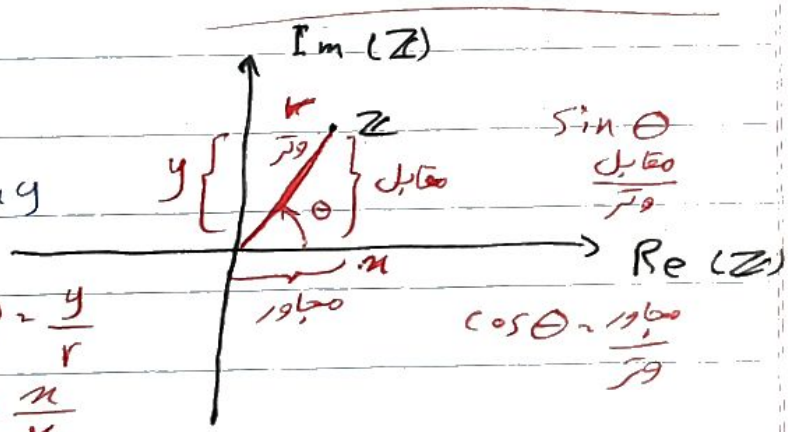
$Z_2 = 1 - 3i$



نمایش در مختصات قطبی با مؤلفه (r, θ)

$r = |Z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = \tan^{-1} x \Rightarrow x = \tan y$



$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$

$\sin\theta = \frac{y}{r}$

$\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

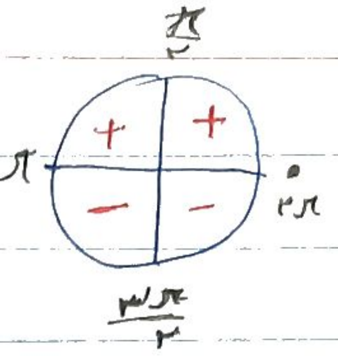
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

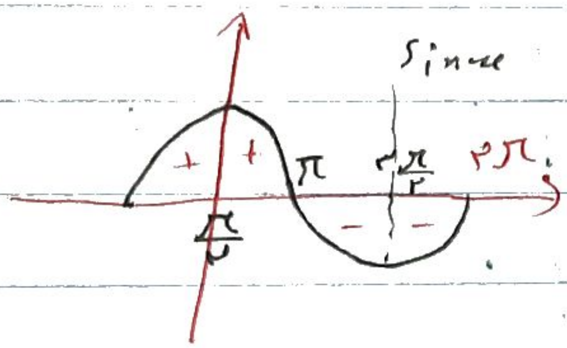
$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x}$ $\quad \boxed{\tan\theta = \frac{y}{x}}$

(1) $\boxed{r = |Z| = \sqrt{x^2+y^2}}$

(2) $\boxed{\theta = \arctan\frac{y}{x}}$

$$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$$





$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right) = +\cos\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right) = +\cos\theta$$

$$\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right) = -\cos\theta$$

$$\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}-\theta\right) = -\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right) = -\sin\theta$$

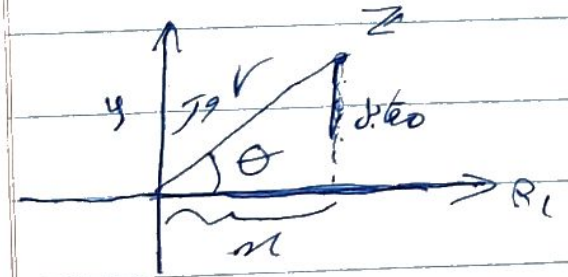
$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right) = +\sin\theta$$

۱۴۰۴/۸/۲۶

$$Z = x + iy$$

$$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$$



$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{\theta = \operatorname{Arc}\tan\frac{y}{x}}$$

$$y = \tan^{-1} \Leftrightarrow x = \tan y$$

$Z = r\cos\theta + i r\sin\theta$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

اویلر

$e = \cos\theta + i\sin\theta$ رابطه اویلر

هدف بدست آوردن r, θ است.

$\boxed{Z = re^{i\theta}}$

$r = |Z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \operatorname{Arc}\tan\frac{y}{x}$

(r, θ)

مثال ۱

$Z = \overset{x}{1} + \overset{y}{1}i$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \operatorname{Arc}\tan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$ یا $\pi + \frac{\pi}{4}$

$\tan\theta = \tan(\pi + \theta)$

$\pi + \theta = \theta = \operatorname{Arc}\tan y/x$

$Z = re^{i\theta} \Rightarrow \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

AFAGH

مثال ۲

$$Z_2 = \overset{x}{\sqrt{3}} - \overset{y}{i}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \operatorname{Arc\,tan} \frac{y}{x} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\pi}{6} \text{ یا } \pi + \frac{5\pi}{6} \quad \frac{11\pi}{6}$$

$$Z = re^{i\theta} = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\pi/3$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

مثال

$$Z = -1 - \sqrt{3}\, i$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\theta = \operatorname{Arc\,tan} \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \frac{\pi}{3} \text{ یا } \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$Z = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Subject .... Date

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow z^m = r^m e^{im\theta}$$

$$z^m = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)$$ رابطه دموآور

$$z = (1+\sqrt{3}\,i)^{10}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x} = \operatorname{Arctan}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \text{ یا } \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z^{10} = 2^{10} e^{i\frac{10\pi}{3}}$$

$$z^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

$$z^{10} = 2^{10}\left(\cos\left(\overset{2\pi}{3\pi} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z^{10} = 2^{10}\left(\overbrace{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)}^{-\cos\frac{\pi}{3}} + i\,\overbrace{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)}^{-\sin\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$z^{10} = 2^{10}\left(\overset{-\frac{1}{2}}{\cancel{-\cos\frac{\pi}{3}}} + i\,\overset{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cancel{\sin\frac{\pi}{3}}}\right)$$

$$z^{10} = 2^{10}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Subject ______ Date ______

a و b را طوری تعیین کنید که $1-i$ ریشه معادله $Z^7 + aZ^5 + b = 0$ باشد

$\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\frac{\pi}{4}$

$Z = 1 - i \qquad Z^7 = ? \qquad Z^5 = ?$

$r = |Z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \mathrm{Arctan}\,-1 = \frac{3\pi}{4}$ یا $\pi + \frac{3\pi}{4}$ $\quad \frac{7\pi}{4}$

$Z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}}$

$Z^5 = \sqrt{2}^5\, e^{i\frac{35\pi}{4}}$

$Z^5 = 4\sqrt{2}\, e^{i\frac{35\pi}{4}}$

$Z^5 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{35\pi}{4} + i\sin\frac{35\pi}{4}\right)$

$Z^5 = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(8\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$Z^5 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$Z^5 = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$Z^5 = 4\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$Z^5 = 4\cancel{\sqrt{2}}\left(-\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}\right)$

$Z^5 = -4 + 4i$

ادامه سوال قبلی

$$z^7 = \sqrt{2}^{\,7}\, e^{i\,49\frac{\pi}{4}}$$

$$z^7 = 8\sqrt{2}\left(\cos\left(49\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(49\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z^7 = 8\sqrt{2}\left(\cos\left(12\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(12\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z^7 = 8\sqrt{2}\left(\cos\overset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cancel{\frac{\pi}{4}}} + i\sin\overset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cancel{\frac{\pi}{4}}}\right)$$

$$z^7 = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z^7 = 8 + 8i$$

$$8 + 8i + a(-4 + 4i) + b = 0$$

$$8 + b - 4a + i(8 + 4a) = 0$$

$$8 + 4a = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$8 + b + 4\overset{(-2)}{a} \qquad b = -16$$

Subject Date

$$Z = \frac{\overbrace{(\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i)^3}^{Z_1} + i\overbrace{(1-i)^{10}}^{Z_2} + 16\sqrt{2}}{\underbrace{(-2+2i)^4}_{Z_3} + 4i}$$

$$Z_1 = \sqrt{2}+\sqrt{6}\,i \Rightarrow$$

$$r = |Z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = \operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ یا } \pi+\frac{\pi}{3}$$

$$Z = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$Z_1^3 = (2\sqrt{2})^3 e^{i\pi}$$

$$Z_1^3 = 16\sqrt{2}\,(\overset{-1}{\cancel{\cos}\pi} + i\overset{0}{\cancel{\sin}\pi})$$

$$Z_1^3 = -16\sqrt{2}$$

$$Z_2 = 1-i$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x} = -1 \quad \frac{3\pi}{4} \text{ یا } \pi+\frac{3\pi}{4}$$

$$Z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

$$Z_2^{10} = \sqrt{2}^{10} e^{i\overset{35}{\cancel{70}}\frac{\pi}{\cancel{4}_{2}}}$$

$$Z_2^{10} = 32\left(\cos\frac{35\pi}{2} + i\sin\frac{35\pi}{2}\right)$$

$$Z_2^{10} = 32\left(\cos\left(17\pi+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(17\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$Z_2^{10} = 32\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ⟸ ادامه

$Z_2^{10} = 32\left(-\overset{0}{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}} - i\overset{1}{\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\right)$

$Z_2^{10} = -32i$

$Z_3 = (-2+2i)(-2+2i) = -8i$

$Z = \dfrac{\cancel{-16\sqrt{2}} + i(-32i) \cancel{+16\sqrt{2}}}{\underbrace{-8i+4i}_{-4i}}$

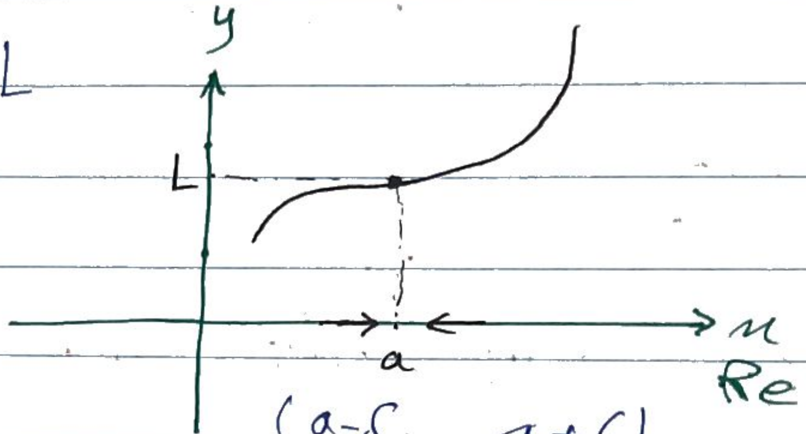
$Z = \dfrac{i(\cancel{-}32i)}{\cancel{-}4i} = 8i$

$Z = \left(\dfrac{1-i}{1+\sqrt{3}\,i}\right)^{20}$ تمرین

Subject ______ Date ۱۴۰۴/۹/۱۰

حد و پیوستگی : Lim

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$



$x \to a^+$ حد راست

=

$x \to a^-$ حد چپ

$(a-\delta \quad a+\delta)$

حد تابع $f(x)$ وقتی x به سمت a نزدیک می‌شود
برابر با L است.

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی محذوف a تعریف
شده باشد منظور از همسایگی محذوف a در واقع یک بازه روی
محور حقیقی است که اگر این همسایگی را به شعاع (δ) در
نظر بگیریم از $a+\delta$ و $a-\delta$ در این بازه قرار می‌گیرد.
مجموعه نقاطی که در این بازه قرار دارند در واقع به همسایگی a به
شعاع δ قرار دارد، حال اگر این همسایگی خود نقطه a را شامل
نشود همه می‌شود همسایگی ~~[illegible]~~
محذوف.

هنگامی که x با مقادیر بزرگتر از a به a نزدیک شود حد به دست آمده را حد راست می نامند.

$\lim_{x \to a^+} f(x) =$ حد راست

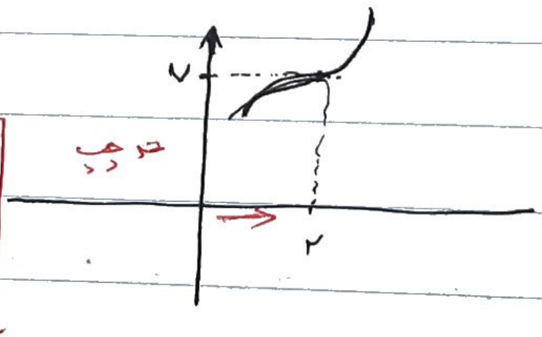
هنگامی که x با مقادیر کوچکتر از a به a نزدیک شود حد به دست آمده را حد چپ می نامند.

$\lim_{x \to a^-} f(x) =$ حد چپ

نکته: زمانی حد $f(x)$ در نقطه $x=a$ موجود است که اولاً حد چپ و راست موجود باشد دوماً حد چپ و راست با هم برابر باشند.

مثال:

$$\lim_{x \to 2} 2x+3 = 2(2)+3 = 7$$



x	۱٫۹	۱٫۹۹	۱٫۹۹۹ ...	
$2x+3$	۶٫۸	۶٫۹۸	۶٫۹۹۸ ...	

x	۲٫۱	۲٫۰۱	۲٫۰۰۱ ...
$2x+3$	۷٫۲	۷٫۰۲	۷٫۰۰۲ ...

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \quad , \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = M$

۱) $\lim \left[f(x) \begin{smallmatrix} \times \\ + \\ - \\ \div \end{smallmatrix} g(x) \right] = \lim f(x) \begin{smallmatrix} \div \\ - \\ + \\ \times \end{smallmatrix} \lim g(x)$

۲)

۳)

۴)

۵) $\lim\limits_{x \to a} c\, f(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$

۶) $\lim \sqrt[n]{f(x)}$ $\quad n =$ زوج $\quad L > 0$

---

۱) $\lim\limits_{x \to 3^{+}} x^2 + 5x = (3)^2 + 5(3) = 24$

۲) $\lim\limits_{x \to 2} 7x + 1 = 7(2) + 1 = 15$

۳) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt[\text{زوج}]{2x+1} = \sqrt{2(5)+1} = \sqrt{11}$

۴) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{1}{3}$

Subject ________ Date

$$-\ominus$$

$$|\ominus| = \ominus(x)$$

$$|-3| = 3$$

$$|3| = 3$$

$$|\oplus| = \oplus$$

① مفهوم یک قدر مطلق یعنی فاصله یک عدد با صفر را نشان می دهد.

② جزء صحیح یا براکت

$$[3,1] = 3 \qquad [2,9] = 2$$

$$[-3,2] = -4$$

$$[-4,65] = -5$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x - \overset{2,9}{[x]}}{x+5} = \lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+5} = \frac{1}{8}$$

$$\lim \frac{2x + |x-1|}{x+5} \qquad x \to 1^- \qquad x \to 1^+$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2x + x - 1}{x+5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x - (x-1)}{x+5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Subject ______ Date ______

حدهای بی‌نهایت

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x>2 \\ x & x\leq 2 \end{cases}$$

حل: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 2x+1 = 5$

1) $\dfrac{+\text{عدد}}{0^+} = +\infty$

2) $\dfrac{-\text{عدد}}{0^+} = -\infty$

3) $\dfrac{-\text{عدد}}{0^-} = +\infty$

4) $\dfrac{+\text{عدد}}{0^-} = -\infty$

1) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{5}{x-3} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{7x}{x-1} = \dfrac{7}{0^-} = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{7}{(x-3)^2} = +\infty$

۱) $\lim_{x \to 1} x^3 + 2x + 5 = (1)^3 + 2(1) + 5 = 8$

۲) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{|x-1|} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{x-1}}{-(\cancel{x-1})} = -1 \\ \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1 \end{cases}$ حد ندارد

۳) $\lim_{x \to 0} \sqrt{3x} = \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} \sqrt{3x} =) \text{ حد ندارد} \\ \lim_{x \to 0^+} \sqrt{3x} = 0 \end{cases}$

حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$

$\frac{0}{0}$ حالت مبهم است زیرا جواب آن می تواند مساوی با هر عددی باشد . به طوری با طرفین و وسطین به معادله درستی می رسیم .

$\frac{\infty}{\infty}$ مبهم است زیرا جواب آن مساوی هر عددی می تواند باشد .

برای رفع ابهام چندین روش وجود دارد. یک روش ساده سازی صورت و مخرج یا یافتن فاکتور مشترک .

(۱) روش ساده سازی صورت و مخرج یا یافتن فاکتور مشترک

(۲) قاعده هوپیتال

(۳) رابطه هم‌ارزی

(۴) ضرب صورت و مخرج در یک عبارت

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cancel{\cos}^{3} x}{\cancel{\sin^2 x}} = \frac{0}{0}$$ مبهم

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cancel{\cos x})(1+\cos x+\cos^2 x)}{(1-\cancel{\cos x})(1+\cos x)} = \frac{3}{2}$$

Subject Date

$$\lim \frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^3}{x^2} =$$

$$1-\left((1)^3+3(1)\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2(1)+\left(-\frac{x^2}{2}\right.\right.$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} \times \frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x+5}+3} = \frac{x+5-9}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} =$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x+5}+3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3+x}{x^5+x^2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(5+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}\right)}{\cancel{x^5}\left(1+\cancel{\frac{1}{x^3}}^{\,0}\right)} = +\infty$$

$$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

AFAGH

Subject Date

مشتق

فرض کنید f یک تابع و $a \in D_f$ باشد اگر حد

تابع $\boxed{\lim \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ می‌گوییم تابع

f در نقطه a مشتق پذیر است و مقدار این حد را با

$f'(x)$ یا $f'(a)$ نمایش می‌دهیم.

مشتق تابع $f(x)$ برابر x^2 و $x=1$ حساب کنید

$f(x)=x^2 \quad x=1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = 2$

$x^n \xrightarrow{\text{مشتق}} nx^{n-1}$

$x^2 = 2x^1 = 2$

$x=1$

مثال

① x^3+2x^2+3x+1

$3x^2+4x^1+3$

Subject ... Date

(۲) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = -\frac{1}{x^{2}}$

(۳) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\cancel{x}}}$

$x=1$

۲۰۲۴، ۹، ۱۷

۱) $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$

۲) $(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x)$

۳) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - g'(x)\, f(x)}{g^{2}(x)}$

۴) $\frac{d}{dx} \overset{\text{عدد ثابت}}{c} = 0$

۵) $\frac{d}{dx} x^{n} = n x^{n-1}$

۶) $(c f(x))' = c f'(x)$

۷) $\sqrt[m]{x^{n}} = x^{\frac{n}{m}}$

$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}$

مثال $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + x^{-3}\right)' = -\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}-\frac{3}{3}=-\frac{5}{3}} \; -3x^{-4}$

$2x^{-\frac{2}{3}}$

مثال $\left(\frac{3x^2+3}{x^2+x}\right)' = \frac{(6x)(x^2+x)-(2x+1)(3x^2+3)}{(x^2+x)^2}$

$\left((x^3+3x)(x^2+1)\right)' = (3x^2+3)(x^2+1)+(2x)(x^3+3x)$

8) $(f^{n}(x))' = n f^{n-1}(x)\, f'(x)$

مثال $(x^3+x)^{10} = 10(x^3+x)^{9}(3x^2+1)$

9) $(a^x)' = a^x \ln a \Rightarrow (e^x)' = e^x$

مثال $(2^x)' = 2^x \ln 2$

10) $(a^{u(x)})' = u'(x)\, a^{u(x)} \ln a \Rightarrow (e^{u(x)})' = u'(x)\, e^{u(x)}$

مثال $(2^{\sqrt{x}})' = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)(2^{\sqrt{x}})\ln 2$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $\quad \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$

مثال $\left(e^{\frac{x^{-4}+4a}{a}}\right)' = (-4x^{-5}+4)\,e^{x^{-4}+4x}$

۱۱) $\log_a^{(x)} = \frac{1}{x\ln x} \Rightarrow \ln|x| = \frac{1}{x}$

۱۲) $\ln u(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

مثال $f(x) = \ln(۳^x + x^۲) = \frac{۳^x \ln ۳ + ۲x}{۳^x + x^۲}$

مشتق توابع مثلثاتی

۱۳) $(\sin x)' = \cos x \Rightarrow (\sin u(x))' = u'(x)\cos x$

۱۴) $(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow (\cos u)' = -u' \cos u$

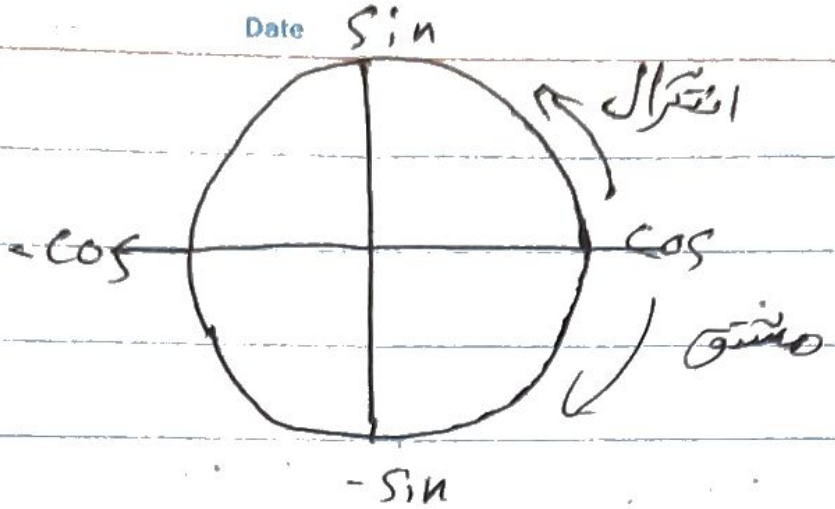
۱۵) $(\tan x)' = (1+\tan^۲ x) = \sec^۲ x \Rightarrow (\tan u(x))' = u'(1+\tan^۲ x) = \sec^۲ u$

۱۶) $(\cot x)' = -(1+\cot^۲ x) = -\csc^۲ x \Rightarrow (\cot u)' = -u'(1+\cot u) = -u' \csc u$

۱۷) $(\sec x)' = \sec x \tan x \Rightarrow (\sec u)' = u' \sec u \tan u$

۱۸) $(\csc x)' = -\csc x \cot x \Rightarrow (\csc u)' = u' \csc u \cot u$

Subject Date



$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x(\cos x) + \sin x \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

1) $x^2 \cos x = 2x \cos x - x^2 \sin x$

2) $3 \sin(2x^4 + x) = 3(8x^3 + 1)\cos(2x^4 + x)$

$u' \cos u$

3) $\cos \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{u} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \sin \sqrt[3]{x}$

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

۴) $\sec \underset{u}{x^{۳}} = ۳x^{۲} \sec x^{۳} \tan x^{۳}$

$u' \sec u \tan u$

۵) $\csc^{۳} x = -۳ \csc^{۲} x \cdot \csc x \cot x$

$n f^{n-1}(x)\ f'(x)$

---

۱) $f(x) = ۲x^{۳} - ۹x^{۲} + ۱۲x$

$f'(x) = ۶x^{۲} - ۱۸x + ۱۲$

$f''(x) = ۱۲x + ۱۸$

$f'''(x) = ۱۲$

$f'''' = ۰$

تمرین

۲) $f(x) = x + \frac{۱}{x}$

۳) $\sin(\sin x)$

۴) $x^{۴} - ۴x^{۲} + ۴$

Subject Date

5) $\frac{1}{x^2+x+2}$

6) $x-\sin x$ f', f'', f'''

7) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ f', f''

8) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$ f', f''

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ تابعی باشند اگر حد $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$
با مبهم $\frac{0}{0}$ اتفاق بیفتد قاعده‌ی هوپیتال این اجازه را به ما می‌دهد
که به جای اینکه حد $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ را حساب کنیم این حد را
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ حساب کنیم و حاصل این عبارت را به عنوان حد آن
عبارت قرار دهیم.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$$

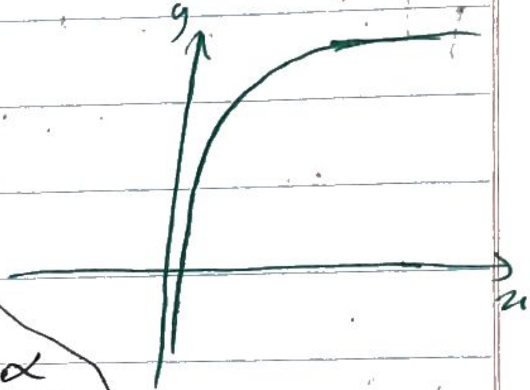
$\frac{0}{0}$ ، مبهم

$$\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{-\cos(1-x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$-2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\ln x}=\frac{-\infty}{-\infty}$$

$$\frac{u'(x)}{u(x)}$$



$$\xrightarrow{Hop}\lim\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}\quad \frac{\frac{1}{\tan x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$$

$x\to\infty \quad \ln x\to+\infty$

$x\to 0 \quad \ln x\to-\infty$

$$\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\tan^2 x)}=1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-2x^2-8}{x^2-2x}=\frac{16-8-8}{4-4}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 2}\frac{4x^3-4x}{2x-2}=\frac{24}{2}=12$$

Subject ______ Date ______

تمرین

1) $$\lim \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$$

۲) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt[3]{x}}{\ln(2-x)}$$

۳) $$\lim_{x\to 3} \frac{x-\sqrt{3x}}{27-x^3}$$

۴) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$$

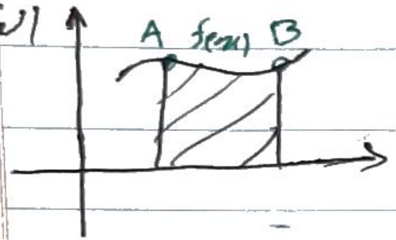
Subject Date

ه) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2}{x^2 - 3x + 2}$

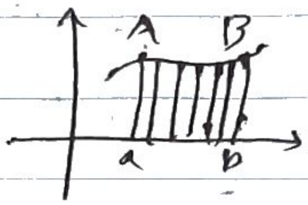
(۱۴۰۴,۹,۲۴)

کاربرد انتگرال

الف



ب



اگر از ما بخواهند مساحت زیر نمودار f(x) را حساب کنیم می‌آییم سطح زیر نمودار (الف) را به n تا مستطیل همانند نمودار (ب) تبدیل می‌کنیم مستطیل‌هایی که طول آن f(x) و عرض آن dx و سپس مساحت هر کدام از مستطیل‌ها را حساب کرده و جمع می‌کنیم.

در ریاضی به جای اینهمه حساب کردن و جمع کردن مساحت‌ها می‌آییم از نماد انتگرال ($\int$) که از کلمه sum به معنی جمع کردن است استفاده می‌کنیم پس به جای اینهمه محاسبات می‌نویسیم $\int_a^b f(x)\,dx$

$$f(x) = x^2 \qquad \frac{dy}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

$$f'(x) = 2x$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int 2x \, dx = \frac{\cancel{2} x^{1+1=2}}{\cancel{2}} = x^2 + C$$

$$\frac{d}{dx} c f(x) = c \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

$$\int f(x) g(x) \, dx \neq \int f(x) \, dx \int g(x) \, dx$$

Subject Date

فرمول های انتگرال گیری

1) $\int dx = x + C$

2) $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

مثال

$$\int (x^2 + 3x)\, dx = \int x^2 \, dx + \int 3x \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C$$

$$\int \sqrt[3]{x^2}\, dx = \int x^{\frac{2}{3}} \, dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C$$

$$\int \frac{x^3 - 2x^2}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\, dx - \int \frac{2x^2}{\sqrt{x}}\, dx =$$

$$\int x^{3-\frac{1}{2}}\, dx - \int 2x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$\int x^{3-\frac{1}{2}}\, dx - \int 2x^{2-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$\int x^{\frac{5}{2}}\, dx - \int 2x^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - \frac{2x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C$$

فرمول های پایه ای انتگرال مثلثاتی

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$(\tan x)' = (1+\tan^2 x) = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = (1+\cot^2 x) = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \overset{\frac{1}{\cos x}}{\sec x}\ \overset{\frac{\sin x}{\cos x}}{\tan x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x = -\frac{\cos}{\sin^2 x}$$

۳) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\cos x + C$

۴) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\cos kx\,dx = \frac{1}{k}\ \cancel{\cos}\ \sin x + C$

۵) $\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x + C$

$\int (1+\tan^2 kx) = \frac{1}{k}\tan x + C$

$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

۶) $\int (1+\cot^2 x)\,dx = -\cot x + C$

$\int (1+\cot^2 (kx))\,dx = \frac{1}{k}\cot x + C$

$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

۷) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \sec x + C$

۸) $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} = -\csc x + C$

9) $\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$

10) $\int a^{kx}\,dx = \frac{1}{k \ln a} a^{kx} + C$

11) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(f(x)) + C$

۱۲) $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

مثال

۱) $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$

عدد ثابت

۲) $\int e^{2+x}\,dx = \int e^{2} e^{x}\,dx$

$e^{2} e^{x} + C$

۳) $\int 3^{2x}\,dx = \frac{1}{2 \ln 3} 3^{2x} + C$

۴) $\int \frac{1+\ln x}{5+x\ln x}\,dx = \ln(5+x\ln x)+C$

$(5+x\ln x)' = \ln x + x\frac{1}{x}$

۵) $\int \tan x\,dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln(\cos x)+C$

$(\cos x)' = -\sin x$

۶) $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln \sin a + C$

$(\sin x)' = \cos x$

---

۱) $\int \tan^2 x\,dx =$

$\int (\tan^2 x + 1 - 1)\,dx$

$\int (1+\tan^2 x)\,dx - \int dx$

$\tan x - x + C$

۲) $\int \cot^2 x\,dx =$

$$\int (\cot^2 x + 1 - 1)\,dx$$

$$\int (1+\cot^2 x)\,dx - \int dx$$

$$-\cot x - x + C$$

۳) $\int \frac{1}{1-\sin^2 x}\,dx$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\int \frac{1\,dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\,dx$$

$$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x + C$$

Subject ____________ Date

۴) $\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$

$\int \frac{\sin^{\cancel{3}} x}{\cancel{\sin^2} x \cos^2 x} dx \quad \int \frac{\cancel{\cos^3} x}{\sin^2 x \cancel{\cos^2} x} dx$

$\frac{1}{\cos}$ $\quad \frac{\sin x}{\cos x}$

$\int \sec x \tan x + \int \csc x \cot x \, dx$

$\sec x - \csc x + C$

تمرین

$\int (\tan^2 x \sin x) dx$

Subject ________ Date

روش دوم : تغییر متغیر

واضح است نمی‌توان این انتگرال را با فرمول های پایه‌ای انتگرال حل کرد

و هیچ روشی سراغ نداریم تا بتوانیم آن را ساده‌تر کرد. لذا از این روش

جدید که روش تغییر متغیر است استفاده می‌کنیم تا بتوانیم این انتگرال

را به فرم ساده‌تری تبدیل کنیم.

$$\int x\sqrt{2x-1}\,dx$$

$$t \to dt = 2dx$$

$$t = 2x-1 \Rightarrow t-1 = 2x \qquad \boxed{x = \frac{t+1}{2}}$$

$$dt = 2dx$$

$$\boxed{dx = \frac{1}{2}dt}$$

$$\int \frac{t+1}{2}\sqrt{t} \times \frac{1}{2}\,dt$$

$$\frac{1}{4}\int (t+1)\,t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{(2x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + C$$

Subject Date

$\int \cos^{۲} x \sin x \, dx$

$t = \cos x$

$dt = -\sin x \, dx$

$-dt = \sin x \, dx$

$\Rightarrow -\int t^{۲} dt \Rightarrow -\frac{t^{۳}}{۳} + C \Rightarrow -\frac{\cos^{۳} x}{۳} + C$

تمرین

۱) $\int \sec^{۲} x (\tan^{۳} x + \tan x)$ $\quad t = \tan x$

۲) $\int \cos \sqrt[۳]{1 + ۳ \sin x} \, dx$

روش جزء به جزء

روش جزء به جزء معمولاً برای حل انتگرال هایی که به صورت ضرب دو تابع $\int f(x)g(x)\,dx$ استفاده می شود معمولاً $f(x)$ و $g(x)$ از دو جنس مختلف هستند.

$$\boxed{uv-\int v\,du}$$

روش جزء به جزء

معمولاً u را تابعی را در نظر می گیریم که مشتق گرفتن از آن راحت تر باشد و dv را تابعی که انتگرال گرفتن از آن راحت تر باشد.

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos 3x\,dx}_{dv}$$

$u=x \rightarrow du=dx$

$dv=\cos 3x \rightarrow v=\frac{1}{3}\sin 3x$

$\Rightarrow x\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)-\int \frac{1}{3}\sin 3x\,dx$

$\Rightarrow x\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\cos x\right)+C$

مشتق	انتگرال
x	$\cos 3x$
1	$\frac{1}{3}\sin 3x$
0	$\frac{1}{9}\cos 3x$

تمرین

$$\int \underbrace{(x^2+x)}_{u}\, \underbrace{\sin x\, dx}_{dv}$$

مشتق	
x^2+x	$\sin x$
$2x+1$	$-\cos x$
2	$-\sin x$
0	$\cos x$

$$-(x^2+x)\cos x+(2x+1)\sin x$$

$$+2\cos x$$

Subject ______ Date ______

$$\int \underbrace{(x^2+x)}_{u}\ \underbrace{\sin x\, dx}_{dv}$$

$$uv - \int v\, du$$

$$u = x^2+x \qquad dv = 2x+1\, dx$$

$$dv = \sin x \qquad v = -\cos x$$

$$x^2+x(-\cos x) - \int -\cos x\,(2x+1)$$

$$-(x^2+x)\cos x + \int \cos x\,(2x+1)\, dx$$

$$u = 2x+1 \qquad du = 2x$$

$$dv = \cos x \qquad v = \sin x$$

Subject Date

حالت دیگه سوال صفحه قبل

مشتق	انتگرال
x^2+x	$\sin x$
$2x+1$	$-\cos x$
2	$-\sin x$
0	$\cos x$

$$= -(x^2+x)\cos x + (2x+1)\sin x + 2\cos x + C$$

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}\,dx$$

$$t = 4 - x^2$$

$$dt = -2x\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\,dt = x\,dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^3\cdot\sqrt{x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{x^3}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{4-x^2}{x^2}}}_{\frac{4}{x^2}-1}$$

$$t = \frac{4}{x^2} - 1$$

$$dt = -8x^{-3}\,dx$$

$$dt = \frac{-8}{x^3}\,dx$$

$$-\frac{1}{8}\,dt = \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}\int \sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{8}\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

0	$\cos x$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

$$t=1-x^4$$

$$dt=-4x^3\,dx$$

$$-\frac{1}{4}\,dt=x^3\,dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \Rightarrow -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\,\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-\frac{1}{4}\,\frac{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$$