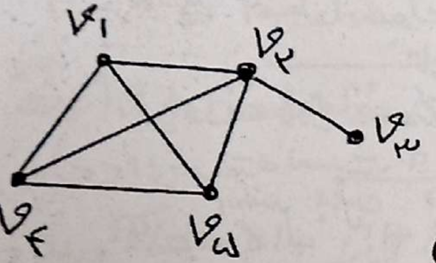
تعریف گراف:

گراف از تعدادی نقطه که به آنها رأس و تعدادی خط یا منحنی که به آنها یال می‌گوئیم تشکیل شده است.

گراف ساده:

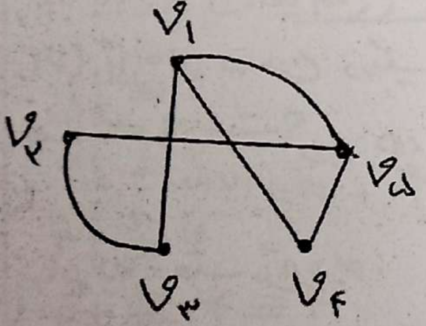
گراف ساده تشکیل شده از یک مجموعه متناهی و غیرتهی از نقاط مانند V (مجموعه رئوس) و یک مجموعه متناهی از خط یا منحنی مانند E (مجموعه یالها) که مجموعه E زیر مجموعه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های دوعضوی V است.

گراف G با مجموعه رئوس و مجموعه یالهای را بصورت $G(V, E)$ نشان می‌دهند.



$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ (رأس‌ها)

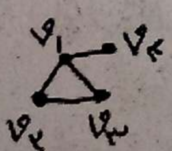
$E(G)=\{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_4v_5\}$ (یالها)



$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(G)=\{v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_5, v_4v_5\}$

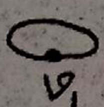
تذکر مهم:



۱) در گراف ساده بین هردو رأس حداکثر یک یال وجود دارد.

۲) یال v_1v_2 با یال v_2v_1 فرقی ندارد و یکی هستند

۳) یال بین یک رأس و همان رأس را طوقه یا حلقه می‌نامند



گراف ساده طوقه ندارد.

۴) ممکن است بین دو راس چند تا یال باشد که آنها را یال چندگانه می‌نامند.

v_1v_2 = یال چندگانه

$v_1v_2=(v_1, v_2)$

گراف ساده یال چندگانه ندارد

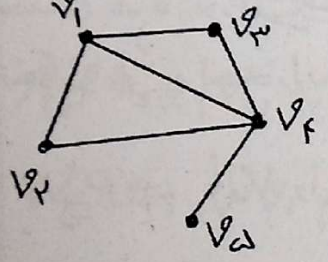
ه) یالی که روی آن جهت باشد یال جهت دار نامیده می‌شود

گراف ساده یال جهت دار ندارد.

نتیجه: گراف ساده، گرافی است که بین هر دو رأس آن حداکثر یک یال وجود داشته و یال طوقه، یال چندگانه و یال جهت دار ندارد.

تعریف مرتبه و اندازه گراف:

به تعداد راس های گراف G، مرتبه گراف گفته می‌شود که آنرا با $P(G)$ یا ساده‌تر با P نشان می‌دهیم همچنین به تعداد یالهای گراف G، اندازه گراف گفته می‌شود که آنرا با $q(G)$ یا ساده‌تر با q نشان می‌دهیم.



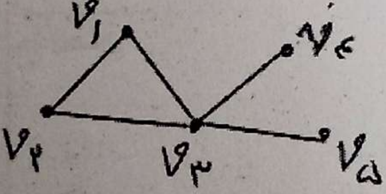
مرتبه = تعداد راس‌ها = $P(G) = P = ۵$

اندازه = تعداد یالها = $q(G) = q = ۶$

درجه یک رأس:

درجه رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل اند و آنرا با $d(v)$ یا $deg(v)$ نمایش می‌دهیم.

اگر درجه یک راس فرد باشد آن را رأس فرد و اگر درجه یک راس زوج باشد آنرا رأس زوج می نامند.

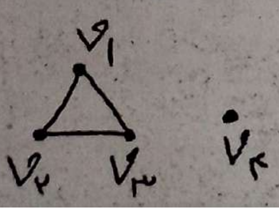


$d(v_1)=۲$ $d(v_2)=۲$

$d(v_3)=۴$ $d(v_4)=۱$ $d(v_5)=۱$

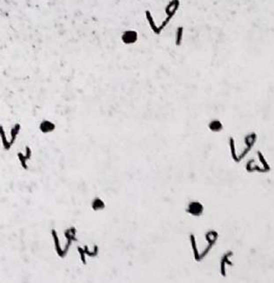
رأس تنها (ایزوله):

به رأسی که درجه آن صفر باشد یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد رأس تنها (ایزوله) می گوییم.



v_4 = رأس تنها (ایزوله)

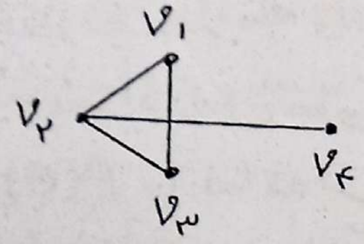
گراف تهی:



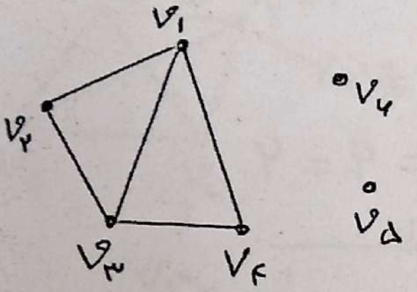
گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند یعنی هیچ یالی نداشته باشد، گراف تهی می نامیم.

بنابراین منظور از گراف تهیِ n رأسی، گرافی شامل n رأسِ تنها و بدون یال است.

مثال ۱: نمودار گراف $G(V,E)$ با $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و $E=\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4\}$ را رسم کنید.



مثال ۲: در گراف مقابل، مجموعه رأس ها، مجموعه یال ها، مرتبه، اندازه و درجه رأس ها را مشخص کنید.



$$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \Rightarrow p=6$$

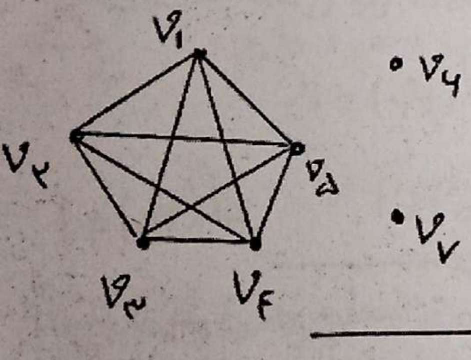
$$E(G)=\{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\} \Rightarrow q=5$$

$\deg(v_1)=\underset{\text{فرد}}{3}$ ، $\deg(v_2)=\underset{\text{زوج}}{2}$ ، $\deg(v_3)=\underset{\text{فرد}}{3}$

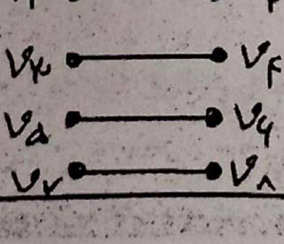
$\deg(v_4)=\underset{\text{زوج}}{2}$ ، $\deg(v_5)=\underset{\text{ایزوله}}{0}$ ، $\deg(v_6)=\underset{\text{ایزوله}}{0}$

مثال ۳: گرافی از مرتبه ۷ و اندازه ۱۰ رسم کنید که دو رأس ایزوله داشته باشد.

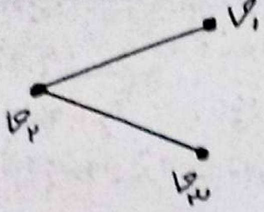
$$p=7 \quad , \quad q=10$$



مثال ۴: گرافی از مرتبه ۸ با حداقل یال چنان رسم کنید که رأس تنها نداشته باشد.

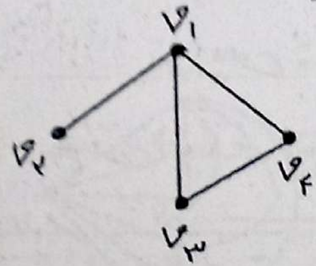


تعریف دو رأس مجاور (همسایه):



دو رأسی که توسط یال به هم وصل شده باشند را، دو رأس مجاور (همسایه) می‌گویند. در شکل مقابل رأس‌های v_1 و v_2 مجاورند یا v_2 و v_3 مجاورند ولی v_1 و v_3 مجاور (همسایه) نیستند.

مجموعه همسایه‌های یک رأس:

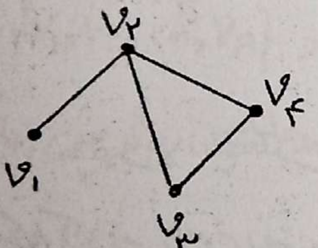


مجموعه همه رأس‌هایی در گراف G که با رأس v مجاورند را مجموعه همسایه‌های رأس v می‌نامند، اگر مجموعه همسایه‌ها شامل v باشد آنرا با علامت $N_G[v]$ و اگر شامل v نباشد را با علامت $N_G(v)$ نشان می‌دهند. در گراف فوق:

$N_G(v_1)=\{v_2, v_3, v_4\}$ $N_G[v_1]=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$N_G[v_4]=\{v_1, v_3, v_4\}$ و $N_G(v_3)=\{v_1, v_4\}$ و $N_G(v_2)=\{v_1\}$

دو یال مجاور:

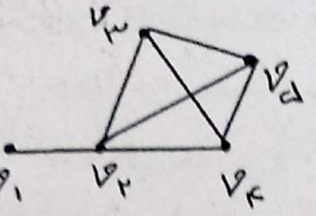


دو یال را مجاور می‌گوئیم، هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دو یال به آن وصل باشند. در گراف مقابل یالهای v_1v_2 و v_3v_2 مجاورند (هر دو به v_2 وصل اند) ولی یالهای v_1v_2 و v_4v_3 مجاور نیستند.

بزرگترین و کوچکترین درجه گراف:

بزرگترین درجه در بین درجه رأس‌های یک گراف را ماکزیمم درجه گفته و آنرا با نماد $\Delta(G)$ یا ساده‌تر Δ (دلتای بزرگ) نمایش می‌دهیم و کوچکترین درجه در بین درجه رأس‌های یک گراف را

مینیمم درجه گفته و آن را با نماد $\delta(G)$ یا δ (دلتای کوچک) نما
می‌دهیم.



$deg(v_1)=1$

$deg(v_2)=4$

$deg(v_3)=deg(v_4)=deg(v_5)=3$

پس: $\delta=1$ و $\Delta=4$

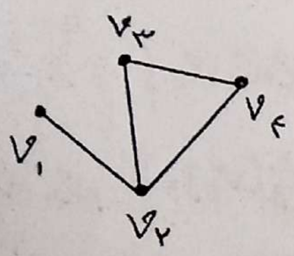
ممکن است یک گراف چند راس از درجه ماکزیمم یا مینیمم داشته باشد

تذکر مهم:

۱) در هر گراف، رأسی که به همه رأس‌های دیگر وصل باشد را، رأس فول می‌گوئیم پس:

$$\boxed{deg(\text{رأس فول}) = p-1}$$

(p = مرتبه گراف = تعداد راس‌ها)



$p=4$

رأس فول $= v_2 \Rightarrow deg(v_2)=3=4-1=p-1$

۲) چون بیشترین درجه رأس در یک گراف p رأسی وقتی بدست می‌آید که آن راس به همه $(p-1)$ رأس دیگر وصل شود پس:

$$\boxed{\Delta \leqslant p-1}$$

مثلاً اگر گراف از مرتبه ۵ (۵ رأسی) باشد در اینصورت: $\Delta \leqslant 4$

۳) اگر در یک گراف از مرتبه p (p رأسی)، k رأس فول (از درجه $p-1$) داشته باشیم در اینصورت:

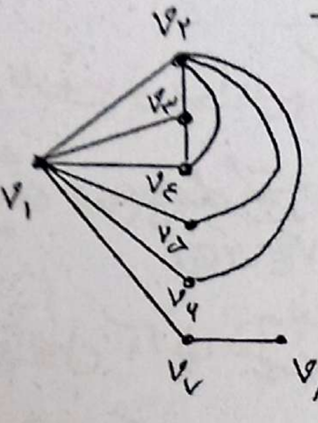
$$\boxed{\delta \geqslant k}$$

مثال ۱: نشان دهید گرافی وجود ندارد که درجه‌های آن ۲ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ باشد.

حل: $p=5$ پس باید $\Delta \leqslant 4$ درصورتی که ماکزیمم درجه ۵ است پس چنین گرافی وجود ندارد

مثال ۲: نشان دهید گرافی با درجه‌های ۲و۳و۴و۵و۶و۶و۶ وجود ندارد.

حل: $p=7$ است پس سه راس فول یعنی از درجه $p-1=6$ داریم در نتیجه $k=3$ است و باید $\delta \geq 3$ باشد درحالی که $\delta=2$ است پس چنین گرافی وجود ندارد.



مثال ۳: گرافی رسم کنید که درجه رأس‌ها بصورت ۱و۲و۲و۲و۳و۳و۵و۶ باشد.

$$deg(v_1)=6 \qquad deg(v_2)=5$$

$$deg(v_3)=deg(v_4)=3$$

$$deg(v_5)=deg(v_6)=deg(v_7)=2 \qquad deg(v_8)=1$$

ارتباط درجه‌ها با تعداد یالها در گراف:

قضیه: اگر G یک گراف با مرتبه p و اندازه q و $V=\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه رئوس آن باشد در اینصورت مجموعه درجات رئوس با دو برابر تعداد یالها برابر است یعنی:

$$\sum_{i=1}^{p} deg\, v_i = deg\, v_1 + deg\, v_2 + \dots + deg\, v_p = 2q$$

p = تعداد راس‌ها

q = تعداد یالها

اثبات: گراف G با مجموعه رأس‌های $V=\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ را در نظر می‌گیریم. یکی یکی یالهای گراف را اضافه می‌کنیم. با اضافه کردن یال اول دو راس درجه یک بدست می‌آید (درجه بقیه فعلاً صفر است) پس مجموع درجه‌ها برابر ۲ است. یال دیگری اضافه می‌کنیم مجموع درجه‌ها برابر ۴ می‌شود با اضافه کردن هر یال، به مجموع درجه‌ها، دو واحد اضافه می‌شود پس مجموع درجه‌ها دو برابر تعداد یالها می‌شود.

ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است (۱ نمره)

اثبات: فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف G
و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد در اینصورت:

$$\sum_{v\in V(G)} deg(v) = \sum_{v\in A} deg(v) + \sum_{v\in B} deg(v)$$

از طرفی می دانیم که مجموع درجات رئوس گراف G عددی زوج است
یعنی $\sum_{v\in V(G)} deg(v)$ زوج است از طرفی $\sum_{v\in B} deg(v)$ نیز زوج است بنابراین
تفاضل آنها نیز زوج است بنابراین $\sum_{v\in A} deg(v)$ زوج است و نتیجه
می شود که $n(A)$ عددی زوج است.

مثال ۱) در یک گراف از مرتبه ۱۰ و اندازه ۳۳، $\Delta = 7$ و $\delta = 6$ است
تعداد راس های درجه ۶ و ۷ را بدست آورید.

$P = 10 \quad , \quad q = 33$

$\left.\begin{array}{l}\Delta = 7\\ \delta = 6\end{array}\right\} \Rightarrow$ گراف فقط راس هایی از درجه ۶ و ۷ دارد

تعداد راس ها از درجه ۶ $= x \Rightarrow$ جمع راس های درجه ۶ $= 6x$

تعداد راس ها از درجه ۷ $= y \Rightarrow$ جمع راس های درجه ۷ $= 7y$

$$\begin{cases} x+y = P = 10 \\ 6x+7y = 2q = 2(33) = 66 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=10 \\ 6x+7y=66 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=4 \\ y=6 \end{array}$$

پس گراف ۴ رأس درجه ۶ و ۶ رأس از درجه ۷ دارد.

مثال ۲) گرافی از مرتبه ۸ و اندازه ۱۴، دو راس از درجه ۵ $=\Delta$، یک راس از درجه ۲
و یک راس از درجه $\delta = 1$ دارد این گراف چند راس درجه ۳ دارد؟

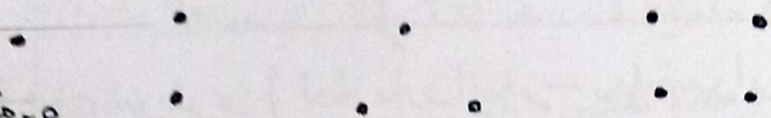
$P = 8 \quad , \quad q = 14$

درجه ها: ۱ و ۲ و $\underbrace{۳ و ... و ۳}_{y \text{ تا}}$ و $\underbrace{۴ و ... و ۴}_{x \text{ تا}}$ و ۵ و ۵

گراف‌های منتظم:

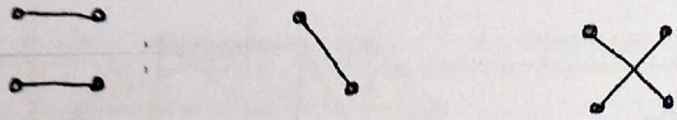
گراف G از مرتبه p را r- منتظم می‌نامند هرگاه درجه‌ی هر راس گراف G برابر r باشد $(0 \leq r \leq p-1)$

گراف‌های ۰- منتظم ⬅



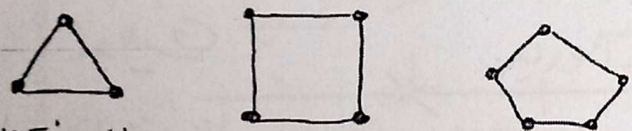
۰- منتظم مرتبه ۴ — ۰- منتظم مرتبه ۳ — ۰- منتظم مرتبه ۲ — ۰- منتظم مرتبه ۱

گراف‌های ۱- منتظم ⬅



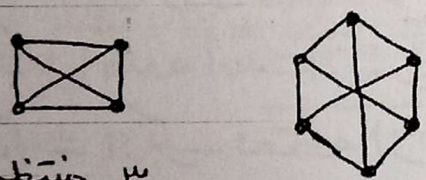
۱- منتظم مرتبه ۴ — ۱- منتظم مرتبه ۲ — ۱- منتظم مرتبه ۴

گراف‌های ۲- منتظم ⬅



۲- منتظم مرتبه ۵ — ۲- منتظم مرتبه ۴ — ۲- منتظم مرتبه ۳

گراف‌های ۳- منتظم ⬅



۳- منتظم مرتبه ۶ — ۳- منتظم مرتبه ۴

قضیه درجه‌ها در گراف منتظم:

در هر گراف r- منتظم با p رأس داریم: $\boxed{pr=2q}$

اثبات: می‌دانیم در هر گراف از مرتبه‌ی p (تعداد راس) و اندازه‌ی q (تعداد یال‌ها) مجموع درجه‌ها برابر $2q$ است.

مجموع درجه‌ها $= \underbrace{r+r+r+\cdots+r}_{p \text{ تا}} = 2q \Rightarrow pr=2q$

تذکر مهم: طبق قضیه بالا pr عددی زوج است پس p و r نمی‌توانند هردو فرد باشند

$$\text{تعداد راس‌ها} = 2 + x + y + 1 + 1 = p = 8 \Rightarrow x + y = 4$$

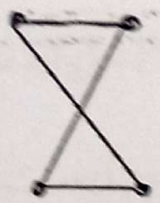
$$\text{مجموع درجه‌ها} = 5 + 5 + 4x + 3y + 2 + 1 = 2q = 2(14) = 28$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 4x + 3y = 15 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=3} \quad \boxed{y=1}$$

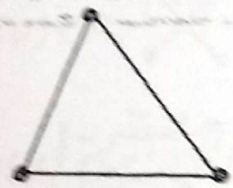
پس یک راس درجه ۳ دارد.

گراف اویلری (لئونارد اویلر - ریاضیدان سوئیسی):

یک گراف ساده یا چندگانه را اویلری می‌گویند هرگاه بتوان از یک راس حرکت کرد و هر یال را یکبار بپیمود و به راس اولیه بازگشت.



اویلری است

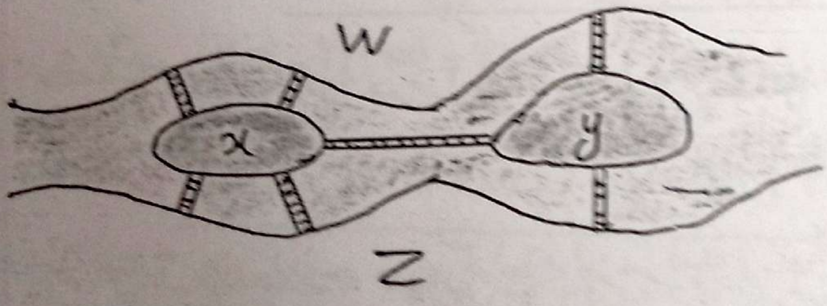


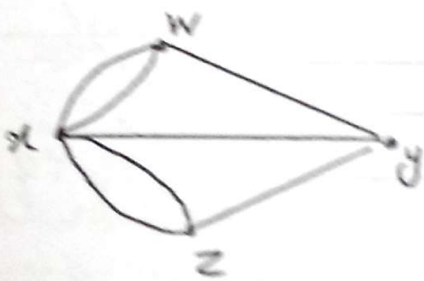
اویلری است

اویلری نیست

مسئله تاریخی:

شهر کونیگسبرگ (در روسیه) از چهار ناحیه x و y و z و w که توسط هفت پل روی رودخانه (در قرن ۱۸ میلادی) به یکدیگر متصل شده بودند، تشکیل شده است. مردم شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می‌توان با حرکت از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور از هر کدام از پل‌ها به نقطه شروع حرکت بازگشت یا نه؟ اویلر ثابت کرد این کار امکان‌پذیر نیست.





(گراف ناحیه‌ها و پل‌ها)

گراف ساده نیست چون بین دو راس x و w بیش از یک یال وجود دارد.

چون در هر راس باید از یک یال وارد و از یک یال دیگر خارج شویم اگر این کار امکان‌پذیر باشد باید درجه همه راس‌ها زوج باشد درجه y زوج نیست پس این کار امکان ندارد

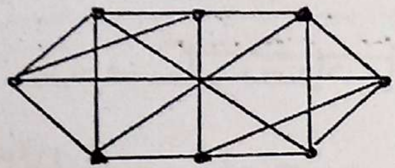
یعنی گراف فرد-منتظم مرتبه فرد نداریم

مثال) گراف ۳- منتظم مرتبه ۵ وجود ندارد.

مثال ۱) در یک گراف ۴- منتظم داریم: $q=3p-8$ ، مرتبه و اندازه گراف را بدست آورده و گراف را رسم کنید.

$r=4$ $\qquad pr=2q \Rightarrow p\times 4=2q \Rightarrow 2p=q$

$$q=3p-8 \Rightarrow 2p=3p-8 \Rightarrow \boxed{p=8} \Rightarrow \boxed{q=16}$$



پس گراف ۴- منتظم مرتبه ۸ می باشد.

مثال ۲) با حذف ۱۶ یال از یک گراف ۷- منتظم، گرافی ۳- منتظم به وجود آمده است. مرتبه گراف را بدست آورید.

گراف ۷- منتظم: $7p=2q \Rightarrow q=\frac{7p}{2}$

گراف ۳ منتظم: $3p=2q \Rightarrow q=\frac{3p}{2}$

$$\frac{7p}{2}-16=\frac{3p}{2} \xRightarrow{\times 2} 7p-32=3p \Rightarrow 4p=32 \Rightarrow \boxed{p=8}$$

گراف های کامل:

گراف G از مرتبه n را گراف کامل می گویند هرگاه درجه هر رأس آن $(n-1)$ باشد. به عبارت دیگر هر راس آن با تمام رئوس دیگر مجاور باشد.

گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می دهیم.

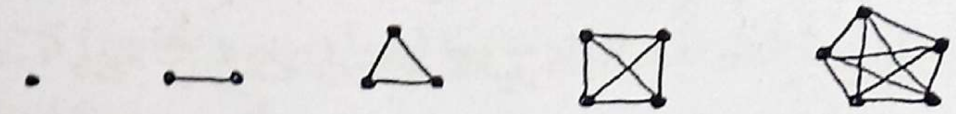
تذکر مهم:

K_n یک گراف n راسی و $n-1$ - منتظم است.

یک گراف کامل n راسی به تعداد $\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!\times(n-2)!}$ یال دارد.

۳) گراف کامل از مرتبه p را با K_p نیز نمایش می‌دهند $(K_n = K_p)$

ساختار گراف‌های کامل تا مرتبه ۵ :

$n=p=$ مرتبه (راس‌ها)	۱	۲	۳	۴	۵
نمودار					
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
$q=$ اندازه (یال‌ها)	۰	۱	۳	۶	۱۰

درجه‌ها و تعداد یال‌های گراف کامل :

درجه هر راس در K_p برابر $p-1$ است، چون هر راس به همهٔ راس‌های دیگر وصل است پس گراف کامل $(p-1)$- منتظم است. به عنوان مثال K_5 همان گراف ۴- منتظم است. و اما تعداد یال‌ها:

مجموع درجه‌ها $= 2q \Rightarrow \underbrace{(p-1)+(p-1)+\dots+(p-1)}_{p\ \text{تا}} = 2q \Rightarrow p(p-1) = 2q$

$$\Rightarrow q = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow \boxed{q(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}}$$

فرمول تعداد یال‌های گراف کامل p راسی

(مثال)

تعداد یال‌های گراف K_5 $= q(K_5) = \frac{5(5-1)}{2} = 10$ تا

تعداد یال‌های گراف K_7 $= q(K_7) = \frac{7(7-1)}{2} = 21$ تا

مثال ۱) حاصلضرب مرتبه در اندازه یک گراف کامل برابر ۹۰ می‌باشد. این گراف چند منتظم است؟

مرتبه $= p$

اندازه $= q$

$p \cdot q = 90 \Rightarrow p \times \frac{p(p-1)}{2} = 90 \Rightarrow p \times p \times (p-1) = 180 = 6\times6\times5$

$\Rightarrow \boxed{p=6} \Rightarrow$ گراف K_6 است گراف ۵- منتظم است

مثال ۲) با کم کردن ۳۳ یال از یک گراف کامل، گراف ۴-منتظم بدست می‌آید. مرتبه گراف کامل را بدست آورید.

$$\text{گراف } = 4\text{-منتظم } p \text{ رأسی} \Rightarrow 4p = 2q \Rightarrow q = 2p$$

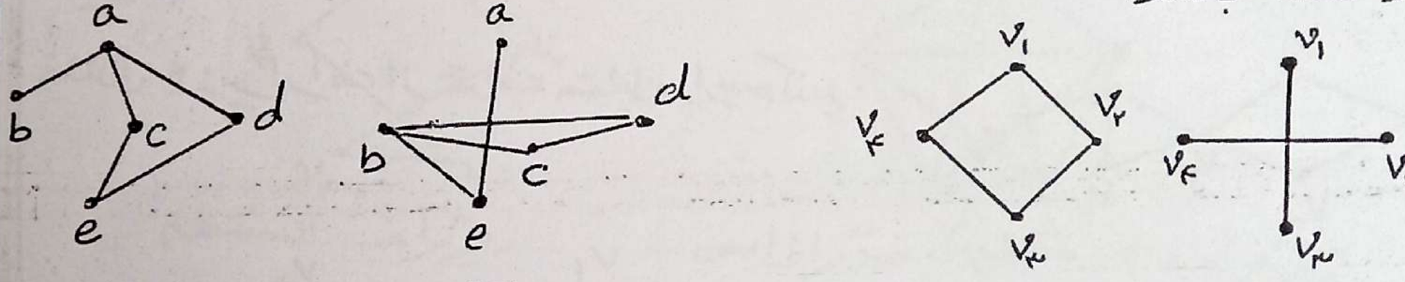
$$\text{گراف } = \text{کامل } p \text{ رأسی} \Rightarrow q = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$\frac{p(p-1)}{2} - 33 = 2p \xRightarrow{\times 2} p^2 - p - 66 = 4p \Rightarrow p^2 - 5p - 66 = 0$$

$$\Rightarrow (p-11)(p+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 11 & \text{ق ق} \Rightarrow \text{گراف مورد نظر} = K_{11} \\ p = -6 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

مکمل گراف:

مکمل گرافی مانند G که آن را با $\overline{G}$ (یا G^c) نمایش می‌دهیم گرافی است که مجموعه رئوس آن همان مجموعه رئوس گراف G است و بین دو رأس از $\overline{G}$ یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو راس در G یالی وجود نداشته باشد.



G $\overline{G}$ G $\overline{G}$

تذکر مهم:

۱) اگر تعداد یالهای گرافهای G و $\overline{G}$ را باهم جمع کنیم، برابر تعداد یالهای گراف کامل K_p می‌شود یعنی:

$$q(G) + q(\overline{G}) = \frac{p(p-1)}{2}$$

۲) درجه یک رأس در گراف G را اگر با درجه همان رأس در $\overline{G}$ جمع کنیم درجه آن راس در گراف کامل می‌شود یعنی:

$$\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = p-1$$

۳) مکمل گراف r-منتظم، گرافی $\bar{r}$-منتظم است و $r + \bar{r} = p-1$

۴) مکمل گراف کامل، گراف $\emptyset$ است چون در گراف کامل تماماً یالها رسم شده است.

مثال) تعداد یالهای گراف G با تعداد یالهای گراف $\bar{G}$ برابر است. مرتبه گراف در تقسیم بر ۴ چه باقیمانده‌ای دارد؟

$$q(G)=q(\bar{G}) \qquad q(G)+q(\bar{G})=\frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 2q(G)=\frac{P(P-1)}{2}$$

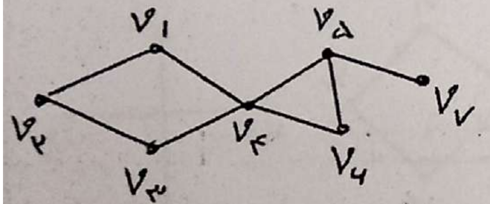
$$\Longrightarrow q(G)=\frac{P(P-1)}{4}$$

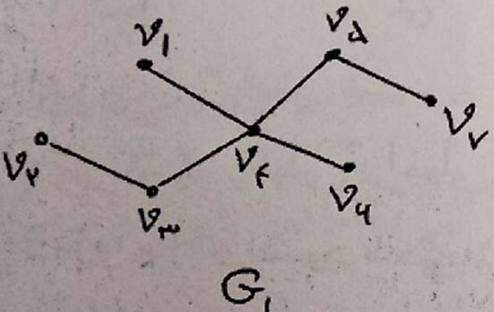
q باید عددی صحیح باشد یعنی $4|P(P-1)$ می‌دانیم هر عدد صحیح مانند P به یکی از صورتهای $4K$ و $4K+1$ یا $4K+2$ یا $4K+3$ است اگر $P=4K$ یا $P=4K+1$ باشد $P(P-1)$ مضرب ۴ می‌شود پس مرتبه یا بر ۴ بخش‌پذیر است یا اینکه باقیمانده‌ای برابر ۱ در تقسیم بر ۴ دارد.

زیرگراف:

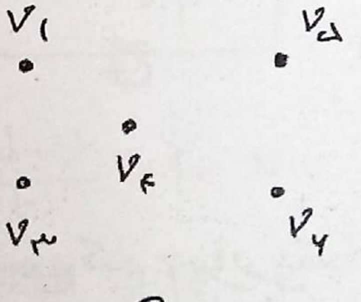
یک زیرگراف از گراف G، گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعهٔ یالهای آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ یالهای G باشد.

مثال ۱: ۴ زیرگراف از گراف مقابل را رسم کنید.

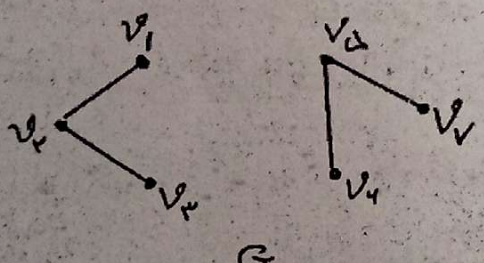




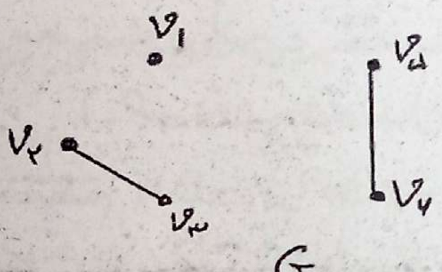
G_1



G_2



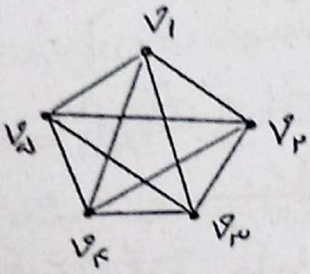
G_3



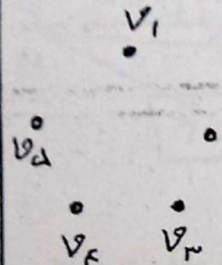
G_4

تذکر مهم: هر گراف، زیر گراف خودش است.

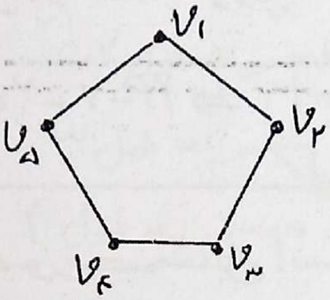
مثال ۲: پنج زیر گراف ۵ رأسی منتظم از گراف K_5 با رأس های $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ را رسم کنید.



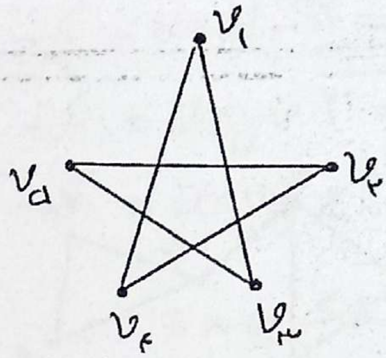
حل: گراف K_5 بصورت مقابل است اگر قرار باشد زیر گراف ۵ رأسی و r- منتظم باشد r نمی تواند فرد باشد (فرد منتظم مرتبه فرد نداریم) پس:



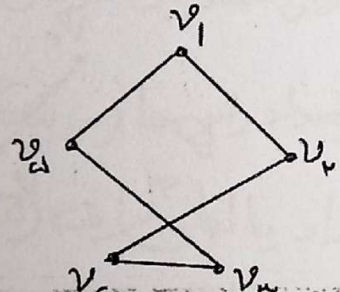
زیر گراف ۰- منتظم (گراف تهی)



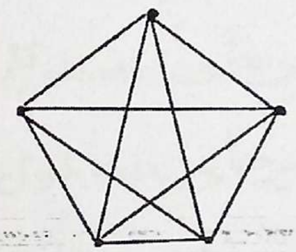
زیر گراف ۲- منتظم



زیر گراف ۲- منتظم



زیر گراف ۲- منتظم



زیر گراف ۴- منتظم که خود گراف است

نکته ریاضی:

تعداد زیر گراف های کامل در گراف کامل K_p برابر است با: 2^p-1

اثبات: می دانیم: $\underbrace{\binom{n}{0}}_{1}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$ = تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی

$\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\dots+\binom{p}{p}=2^p-1$ = تعداد زیر گراف های کامل در K_p

مثال) گراف K_6 چند زیر گراف کامل دارد؟

جواب $= 2^6-1=64-1=63$ تا

تمرین ۱: گراف G از مرتبه ۱۲ و اندازه ۱۰ است. اگر $deg_G(v)=3$ باشد $q(\bar{G})$ و $deg_{\bar{G}}(v)$ را بدست آورید.

$$q(G)+q(\bar{G})=\frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 10+q(\bar{G})=\frac{12\times 11}{2} \Rightarrow q(\bar{G})=56$$

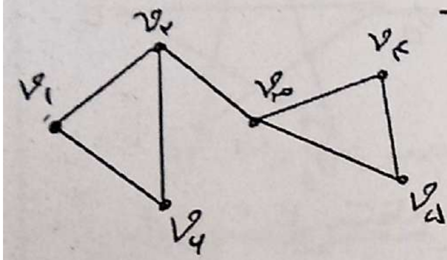
$$deg_G(v)+deg_{\bar{G}}(v)=P-1 \Rightarrow 3+deg_{\bar{G}}(v)=12-1 \Rightarrow deg_{\bar{G}}(v)=8$$

تمرین ۲: مکمل گرافی از مرتبه P که $(2P-7)$- منتظم است، گرافی ۲- منتظم است. P را بدست آورید.

$r=2P-7$

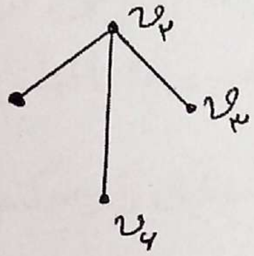
$r'=2$

$$r+r'=P-1 \Rightarrow 2P-7+2=P-1 \Rightarrow \boxed{P=4}$$

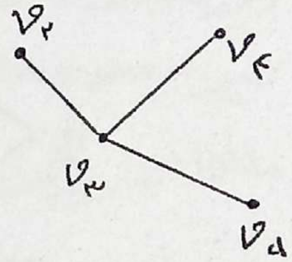


تمرین ۳: گراف G بصورت مقابل است.

الف) زیرگرافی ۴ راسی از اندازه ۳ رسم کنید



یا



ب) G چند زیرگراف دارد که دو راس از درجه ۳ داشته باشد.

حل: مطابق شکل بالا: v_2 و v_3 باید باشند. یال v_1v_4 می‌تواند باشد یا نباشد (۲ حالت) یال v_4v_5 هم می‌تواند باشد یا نباشد (۲ حالت) پس طبق اصل ضرب $2\times 2=4$ زیرگراف با دو راس از درجه ۳ می‌توانیم داشته باشیم

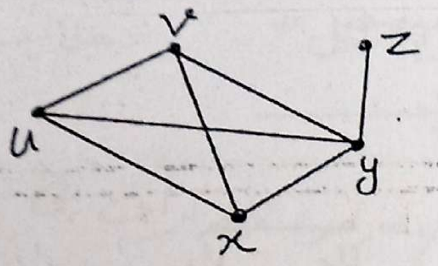
نکته ریاضی:

گراف G از مرتبه P و اندازه q است تعداد زیرگراف‌های هم مرتبه با G برابر است با: 2^q

مثال) گراف تمرین ۳ در بالا از اندازه $q=7$ است چند زیرگراف هم مرتبه با خودش دارد؟ تا $2^q=2^7=128$ = جواب

مسیر در گراف:

فرض کنید u و v دو رأس از گراف G باشند. یک مسیر از u به v (که به آن $u-v$ مسیری گوییم) در G دنباله‌ای متشکل از رأس‌های دوبه‌دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود بطوریکه هر دو رأس متوالی در این مسیر، مجاور هستند. طول مسیر همان تعداد یالهای طی شده است که یکی کمتر از تعداد رأس ها است (مثال)



uv = یک $u-v$ مسیر به طول ۱

uxv = یک $u-v$ مسیر به طول ۲

$uxyv$ = یک $u-v$ مسیر به طول ۳

$uxvyz$ = یک $u-z$ مسیر به طول ۴

تذکر مهم:

۱) هر رأس به تنهایی، یک مسیر به طول صفر از خودش به خودش است

۲) تعداد مسیرهای به طول صفر، برابر تعداد راس ها (مرتبه گراف) است

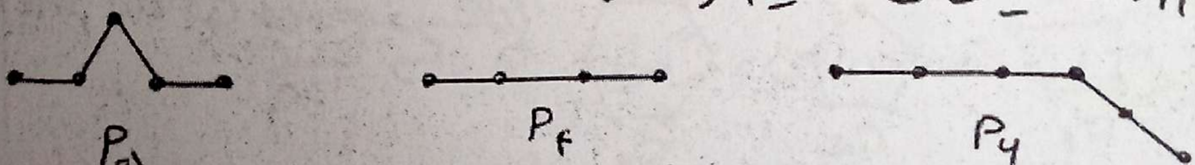
۳) تعداد مسیرهای به طول ۱ همان تعداد یالهای گراف (اندازه گراف) است

۴) جهت حرکت در مسیر مهم نبوده و فقط یالهای طی شده مهم است

در مثال بالا مسیر $uxyv$ با مسیر $vyxu$ فرقی ندارد و یک مسیر است.

تعریف مسیر n رأسی:

گرافی که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد را مسیر n رأسی گفته و با P_n نمایش می‌دهیم (مثال)



P_5 P_4 P_6

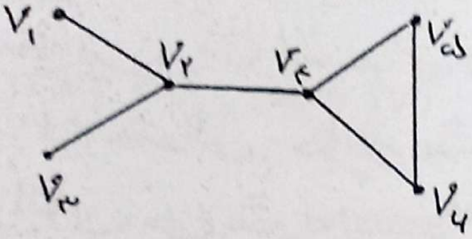
تذکر مهم:

طول مسیر P_n برابر $n-1$ است (تعداد راس ها یک واحد بیشتر از طول مسیر است)

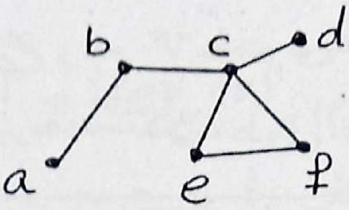
Scanned by CamScanner

گراف های همبند:

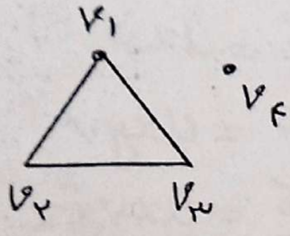
گراف G را همبند می گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. درغیر اینصورت آنرا ناهمبند می گویند



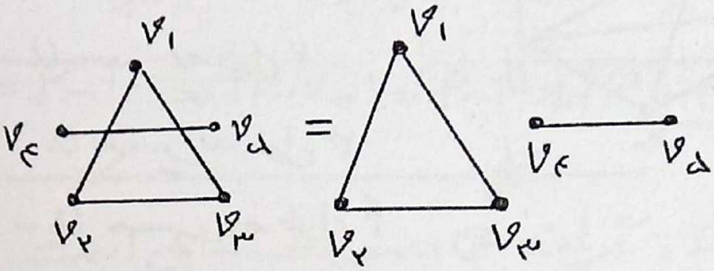
همبند



همبند



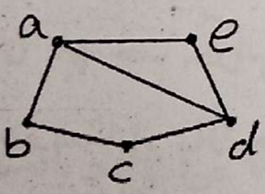
ناهمبند



ناهمبند

دور در گراف:

یک دور به طول m در گراف G دنباله ای از $m+1$ رأس که راس های متوالی مجاور بوده و m راس اول آن دو به دو متمایز بوده و رأس آخر همان راس اول باشد حداقل طول دور برابر ۳ می تواند باشد.

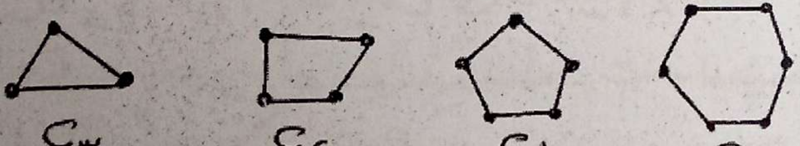


دوری به طول ۴ = abcda

دوری به طول ۳ = aeda

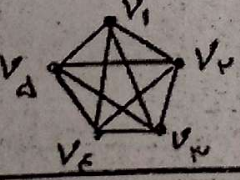
تعریف دور n رأسی:

گرافی که تنها از یک دور n راسی تشکیل شده باشد را دور n راسی گفته و با نماد C_n نشان می دهند (مثال)



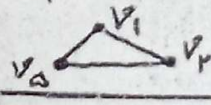
C_3 C_4 C_5 C_6

مثال) گراف K_5 چند زیر گراف بصورت C_3 دارد؟



جواب $= \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$

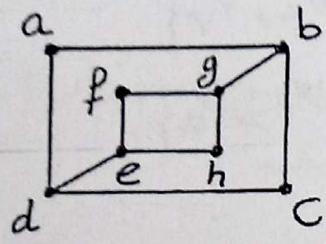
مثلاً:



درس ۲ : مدل سازی با گراف

تعریف مجموعهٔ احاطه‌گر :

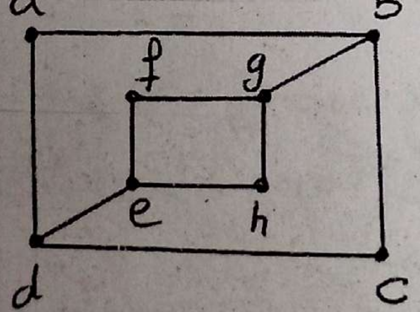
زیر مجموعه D از راس های گراف را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر راس از گراف که در D نباشد ، حداقل به یکی از راس های D وصل باشد.



در گراف مقابل $D = \{a, f, h, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است چون راسهای دیگر گراف که در D نیستند (یعنی راسهای b و g و e و d) به یکی از راسهای D وصل هستند مجموعه $D = \{a, b, g, e, d\}$ هم می‌تواند یک مجموعه احاطه‌گر دیگر باشد چون راسهای دیگر گراف که در D نیستند به یکی از راسهای D وصل هستند. در گراف G هر راس خودش و همه راسهای دیگر گراف G را پوشش می‌دهد و احاطه می‌کند

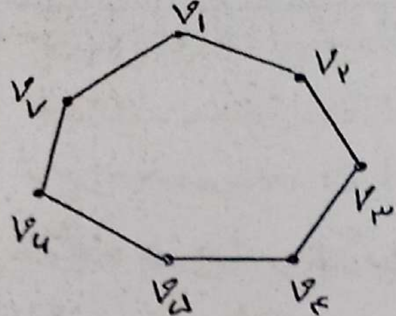
تعریف مجموعه احاطه‌گر مینیمم :

در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه (یا مجموعه‌ها) که کمترین تعداد عضو را دارند ، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم نامیده و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آنرا با $\gamma(G)$ (گامای جی) نشان می‌دهیم به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم ، یک γ- مجموعه هم می‌گوییم



مجموعه احاطه‌گر مینیمم $D = \{b, e\}$

$\gamma(G) = 2$



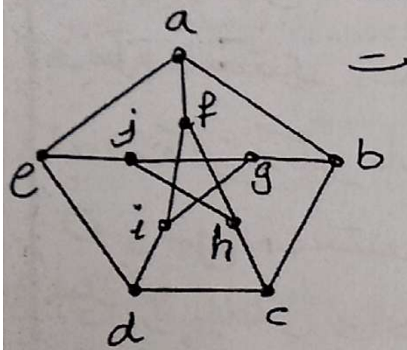
مثال) برای گراف مقابل که دور C_7 است
مطلوبست محاسبه $\gamma(G)=?$ و یک مجموعه احاطه گر؟

یک مجموعه احاطه گر $= \{v_1 , v_3 , v_5 , v_7\}$

یک مجموعه احاطه گر مینیمم $= \{v_1 , v_4 , v_7\}$

یک مجموعه احاطه گر مینیمم دیگر $= \{v_1 , v_2 , v_5\}$

$$\gamma(G)=3$$



مثال) در گراف مقابل که به گراف پترسن معروف است
مطلوبست:

الف) دو مجموعه احاطه گر معرفی کنید.

$D=\{a,b,c,d,e\}$ یا $D=\{a,j,i,c\}$

ب) دو مجموعه احاطه گر مینیمم معرفی کنید.

$D=\{a,i,h\}$ یا $D=\{a,g,c\}$ $\gamma(G)=3$

معرفی یک نماد:

می دانیم اگر x یک عدد صحیح باشد جزء صحیح x را با علامت $[x]$ نشان داده و آنرا بصورت زیر تعریف می کنیم

$$[x]=n \Leftrightarrow n\leq x<n+1 \quad n\in \mathbb{Z}$$

یا

$$[x]=\begin{cases} x & x\in \mathbb{Z} \\ \text{بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از } x & x\notin \mathbb{Z}\end{cases}$$

$[3]=3$

$[4.7]=4$

جزء صحیح عدد x را کف عدد x نیز می گویند و آنرا با علامت $\lfloor x \rfloor$ نشان داده و به آن کف x می گویند.

اگر x عددی غیر صحیح باشد برای نمایش عدد صحیح بعد از x از علامت $\lceil x \rceil$ استفاده می کنیم و آنرا سقف x می خوانیم در حالت کلی:

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$[3] = \lfloor 3 \rfloor = 3$ $\quad$ $[3.7] = \lfloor 3.7 \rfloor = 3$ $\quad$ $\lfloor 5.1 \rfloor = 5$

$\lceil 3 \rceil = 3$ $\quad$ $\lceil 3.7 \rceil = 4$ $\quad$ $\lceil 5.1 \rceil = 6$

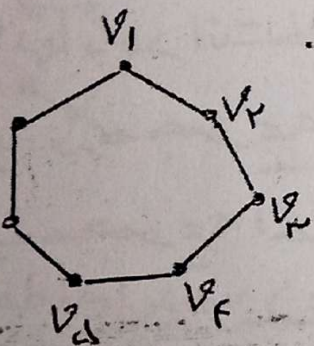
باتوجه به مثالهای بالا، اعداد کف و سقف در اعداد صحیح باهم برابرند

کران پایین $\gamma(G)$:

اگر G یک گراف n راسی با ماکزیمم درجه Δ باشد آنگاه: $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$

در گراف G عدد $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ را یک کران پایین $\gamma(G)$ می نامند یعنی $\gamma(G)$ نمی تواند از آن کمتر باشد

مثال 1 : عدد احاطه گری گراف C_7 را بدست آورید.

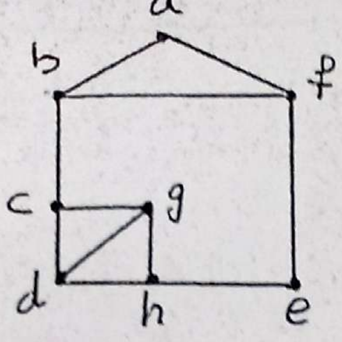


$n = 7$ و $\Delta = 2$

گراف ۲- منتظم است پس: $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{7}{2+1} \right\rceil = 3$

از طرفی $D = \{v_1, v_4, v_6\}$ یک مجموعه احاطه گر است پس $\gamma(G) \leq 3$

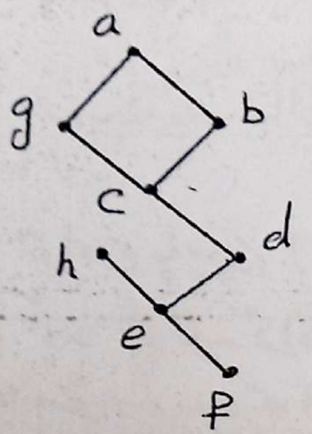
$$\left.\begin{array}{l} \gamma(G) \geq 3 \\ \gamma(G) \leq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma(G) = 3$$



مثال ۳: عدد احاطه‌گری گراف مقابل را بدست آورید.

حل: گراف از مرتبه $n=8$ و $\Delta=3$ است

پس: $\gamma \geq \lceil \frac{8}{3+1} \rceil = 2$ از طرفی $\{f,g\}$ کل رأسها را احاطه می‌کنند پس $\gamma \leq 2$ در نتیجه: $\gamma = 2$



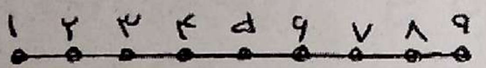
مثال ۴: عدد احاطه‌گری گراف مقابل را بدست آورید.

حل: گراف از مرتبه $n=8$ و $\Delta=3$ است

پس $\gamma \geq \lceil \frac{8}{3+1} \rceil = 2$ به نظر می‌رسد که با ۲ راس نمی‌توان کل راسها را احاطه کنیم زیرا برای احاطه کردن رئوس a، b، c، d و g حداقل دوتا از آنها باید در مجموعه احاطه‌گر باشند (چون $\lceil \frac{5}{3+1} \rceil = 2$) و برای احاطه کردن رئوس e، f و h حداقل یکی از آنها باید انتخاب شوند (چون $\lceil \frac{3}{2+1} \rceil = 1$) بنابراین حداقل ۳ راس باید در مجموعه احاطه‌گر باشد یعنی $\gamma(G) \geq 3$ از طرفی چون $\{a,c,e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است پس $\gamma(G) \leq 3$ در نتیجه: $\gamma(G)=3$

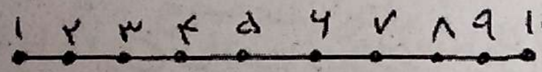
مثال ۵: گراف‌های P_{10}، P_9، C_{10} و C_9 را رسم کنید و عدد احاطه‌گری هر یک را مشخص کنید

P_9:



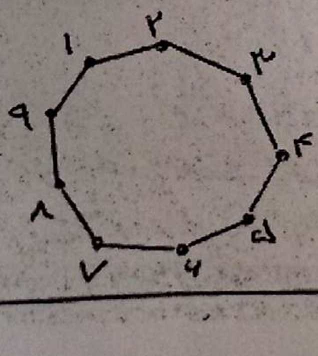
$\gamma(P_9) \geq \lceil \frac{9}{2+1} \rceil = 3$ از طرفی $\{2,5,8\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است پس $\gamma(P_9) \leq 3$ در نتیجه: $\gamma(P_9)=3$

P_{10}:



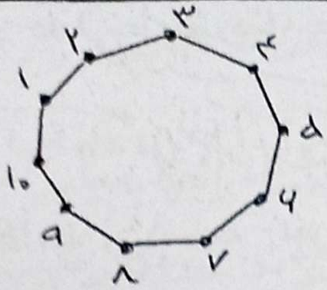
$\gamma(P_{10}) \geq \lceil \frac{10}{2+1} \rceil = 4$ از طرفی $\{2,5,8,10\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است پس: $\gamma(P_{10}) \leq 4$ در نتیجه: $\gamma(P_{10})=4$

C_9:



$\gamma(C_9) \geq \lceil \frac{9}{2+1} \rceil = 3$ از طرفی $\{1,4,7\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است پس: $\gamma(C_9) \leq 3$ در نتیجه: $\gamma(C_9)=3$

C_{10}:



$۴ = \left\lceil \frac{۱۰}{۲+۱} \right\rceil \le \gamma(C_{۱۰})$ از طرفی $\{۱, ۴, ۷, ۹\}$

یک مجموعه احاطه‌گر می‌باشد پس $\gamma(C_{۱۰}) \le ۴$

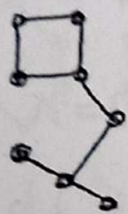
در نتیجه: $\gamma(C_{۱۰}) = ۴$

اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیمم درجه گراف باشد: (نمره ۱٫۲۵)

الف- گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه گر برابر $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ است.

جواب: اگر $n=10$ باشد C_{10} و P_{10} رسم شود چون $\gamma(G)=\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = 4$

ب) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه گری بزرگتر از $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ باشد (یا برابر $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ نباشد)



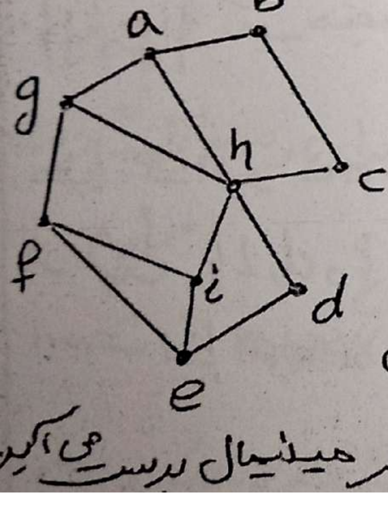
$\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = 2$ ولی: $\gamma(G)=3$

مجموعه احاطه گر مینیمال:

مجموعه احاطه گری که با حذف هر یک از رأس هایش، دیگر احاطه گر نباشد را احاطه گر مینیمال می گوییم.

مثال ۱: (هماهنگ شهریور ۹۸):

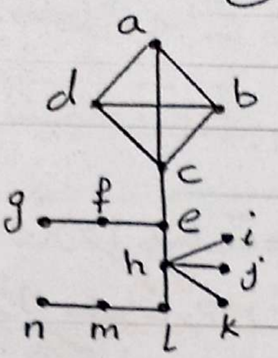
در گراف مقابل یک مجموعه احاطه گر غیر مینیمال انتخاب کنید سپس با حذف برخی از راس ها آنرا به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کنید (۱ نمره)



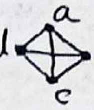
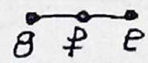
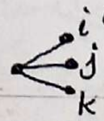
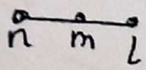
یک مجموعه احاطه گر غیر مینیمال $= \{a, h, f, b\}$

اکنون با حذف راس a از آن، یک مجموعه احاطه گر مینیمال بدست می آید

۱) عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.

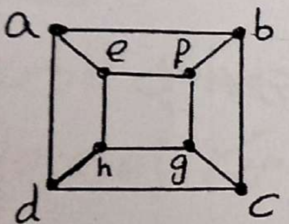


الف) $n=14$, $\Delta=5$ پس : $\gamma(G) \geq \lceil \frac{14}{\Delta+1} \rceil = 3$

اما حداقل یکی از رئوس a، b، c و d باید انتخاب شود چون باید  احاطه شود حداقل یکی از رئوس e، f و g باید انتخاب شود تا گراف  احاطه شود حداقل یکی از رئوس h، i، j و k باید انتخاب شود تا گراف  باید احاطه شود حداقل یکی از رئوس l، m و n باید انتخاب شود تا گراف  احاطه شود

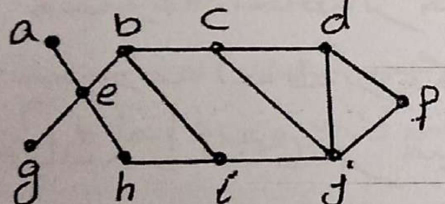
بنابراین حداقل ۴ راس در هر مجموعه احاطه‌گر باید باشد لذا $\gamma(G)\geq 4$

از طرفی چون $\{c,f,h,m\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\gamma(G)\leq 4$ پس $\gamma(G)=4$

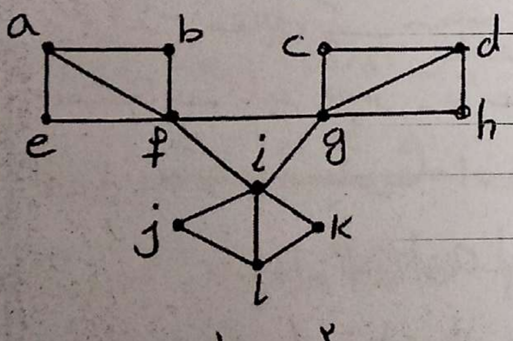


ب) $n=8$ و $\Delta=3$ پس $\gamma(G)\geq\lceil\frac{8}{4}\rceil=2$ از طرفی $\{h,b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\gamma(G)\leq 2$

پس : $\gamma(G)=2$

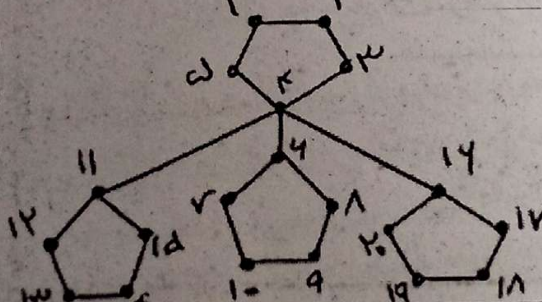


پ) $n=10$ و $\Delta=4$ پس $\gamma(G)\geq\lceil\frac{10}{5}\rceil=2$ از طرفی $\{e,j\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\gamma(G)\leq 2$ پس : $\gamma(G)=2$



ت) $n=12$ و $\Delta=5$ پس $\gamma(G)\geq\lceil\frac{12}{6}\rceil=2$

از طرفی $\{f,d,l\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است لذا $\gamma(G)\leq 3$ پس $\gamma(G)=3$



ث) $n=20$ و $\Delta=5$ پس $\gamma(G)\geq\lceil\frac{20}{6}\rceil=4$

از طرفی $\{2,4,8,10,12,14,17,19\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است پس $\gamma(G)=8$

۲) اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G)=1$ در این صورت به چه ویژگی هایی از گراف G می توان پی برد؟

حل: چون $\gamma(G)=1$ پس یک راس وجود دارد که با همه رأسها مجاور است

در نتیجه: $\Delta(G)=P-1$ پس $q_{min}=P-1$ و گراف می تواند حداکثر یک گراف

کامل باشد پس $q_{max}=\binom{P}{2}$

---

۳) $\gamma(P_n)$ و $\gamma(C_n)$ را به ازای هر $n\in N$ مشخص کنید.

پاسخ: $\gamma(C_n)=\lceil \frac{n}{3} \rceil$ و $\gamma(P_n)=\lceil \frac{n}{3} \rceil$

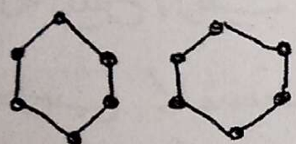
---

۴) اگر G یک گراف k- منتظم n راسی باشد نشان دهید $\gamma(G) \geq \lceil \frac{n}{k+1} \rceil$

حل: چون گراف k- منتظم است پس $\Delta=k$ و $\gamma(G) \geq \lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil = \lceil \frac{n}{k+1} \rceil$

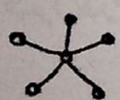
---

۵) یک گراف ۲- منتظم ۱۲ راسی بکشید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

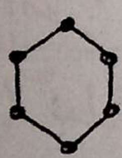


حل: می دانیم: $\gamma(G) \geq \lceil \frac{n}{k+1} \rceil$ پس $\gamma(G) \geq \lceil \frac{12}{3} \rceil$ پس

$\gamma(G) \geq 4$ در شکل مقابل $\gamma(G)=4$



۶) یک گراف ۶ راسی که γ- مجموعه آن به اندازه یک باشد رسم کنید

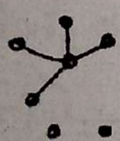


۷) یک گراف ۶ راسی که γ- مجموعه آن به اندازه دو باشد رسم کنید

---

۸) فرض کنید n، k دو عدد طبیعی باشند و $n \geq k$ روشی برای رسم یک گراف

n راسی که عدد احاطه گری آن k باشد ارائه دهید



حل: کافیست k-1 راس ایزوله قرار دهیم و در بقیه رئوس

یک راس را به تمام رئوس دیگر وصل کنیم مثلا: $n=7$ و $k=3$ و $\gamma(G)=3$

آشنایی با منطق ریاضی: گزاره و گزاره‌نما

آمار و احتمال و گسسته

آمار و احتمال: صفحه‌های ۲ تا ۷ کتاب درسی

منطق ریاضی

منطق ریاضی یا منطق نمادی در حقیقت دستور زبان علم ریاضی است که ساختار جملاتی را که در ریاضی به کار می‌رود مورد مطالعه قرار می‌دهد. در منطق ریاضی استدلال‌های ریاضی بررسی می‌شود و درستی یا نادرستی این استدلال‌ها مشخص می‌شود.

گزاره

به هر جملهٔ خبری که می‌تواند ارزش درست یا ارزش نادرست داشته باشد، یک گزاره گفته می‌شود (حتی اگر درست یا نادرست بودن آن برای ما معلوم نباشد.) گزاره‌ها معمولاً با حروف p ، q ، r ، s و ... نمایش می‌دهند.

به طور مثال جملات « ۵ فرد است» و « $\pi^{\sqrt{۲}}$ گنگ است» و « عدد ۷ اول است» همگی گزاره هستند هر چند که $\pi^{\sqrt{۲}}$ را نمی‌دانیم که گنـگ است یا خیر.

اگر ارزش گزاره درست باشد آن را با « د» یا « T » و اگر ارزش گزاره نادرست باشد آن را با « ن» یا « F » نمایش می‌دهیم.

> **نکته**
> جملات پرسشی، امری، عاطفی (احساسی) گزاره محسوب نمی‌شوند. به طور مثال « چه هوای خوبی»، « درس بخوان» به عنوان گزاره محسوب نمی‌شوند.

گزاره‌نما

جملهٔ خبری که در آن یک یا چند متغیر وجود دارد و با جای‌گذاری مقادیر به جای متغیرها تبدیل به گزاره می‌شود گزاره‌نما نامیده می‌شود.

■ مثال ۱: « $x^۲+۲x-۵=۰$ » و « $x+۷<x^۲-۱$ » و « $(x+۱)^۲=x^۲+۲x+۱$ » همگی گزاره‌نما هستند. لذا معادلات، نامعادلات و اتحادها همگی گزاره‌نما هستند.

دامنهٔ متغیر گزاره‌نما

مجموعهٔ مقادیری که می‌توان به جای متغیر در گزاره‌نما قرار دارد تا آن را تبدیل به یک گزاره کند دامنهٔ متغیر گزاره‌نما نامیده می‌شود و آن را با D نمایش می‌دهیم.

■ مثال ۲: دامنهٔ گزاره‌نمای « $x^۲>y^۲$ » مجموعهٔ اعداد حقیقی است یعنی به جای x و y می‌توانیم اعداد حقیقی قرار دهیم. به‌عنوان مثالی دیگر، دامنهٔ گزاره‌نمای « x عددی اول است» مجموعهٔ اعداد طبیعی است.

مجموعهٔ جواب گزاره‌نما

اعضایی از دامنهٔ متغیر را که به ازای آن‌ها گزاره‌نما تبدیل به یک گزاره با ارزش درست می‌شود، مجموعهٔ جواب گزاره‌نما می‌گوییم. مجموعه جواب را با حرف S نمایش می‌دهیم و می‌دانیم همواره $S\subseteq D$ است.

■ مثال ۳: مجموعهٔ جواب گزاره‌نمای « $x^۲+۴x-۵=۰$ » با دامنهٔ اعداد صحیح $D=Z$ برابر $S=\{۱,-۵\}$ است.

نقیض یک گزاره

اگر p یک گزاره باشد گزارهٔ «چنین نیست که p » که آن را با نماد $\sim p$ نمایش می‌دهند، نقیض گزارهٔ p نامیده می‌شود که ارزش آن خلاف ارزش p است. جدول ارزش گزاره نقیض به صورت زیر است:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

> **نکته**
> دو گزارهٔ p و q را هم‌ارز گوییم هرگاه در هر حال هم‌ارزش باشند و آن را با نماد $p\equiv q$ نمایش می‌دهیم.

> **نکته**
> نقیضِ نقیض یک گزاره با خود آن گزاره هم‌ارز است.
>
> $\sim(\sim p)\equiv p$
>
> | p | $\sim p$ | $\sim(\sim p)$ |
> |---|---|---|
> | د | ن | د |
> | ن | د | ن |
>
> با توجه به برابری ستون‌های اول و آخر نتیجه می‌شود این دو گزاره هم‌ارز هستند.

گزاره و گزاره‌نما

۱۰ سؤال

۱ ۱- کدام‌یک از جملات زیر یک گزاره است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲ تا ۵ کتاب درسی)

۱) شاید من کنکور قبول شوم. ۲) عجله کنید، عجله کنید.

۳) برو کار می‌کن نگو چیست کار. ۴) دیروز باران آمد.

۲ ۲- کدام عبارت گزاره است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲ تا ۵ کتاب درسی)

۱) آیا $\sqrt{۲}$ گنگ است؟ ۲) لطفاً لبخند بزنید.

۳) چه هوای خوبی! ۴) عدد $(\sqrt{۳})^{\pi}$ گنگ است.

۳ ۳- چه تعداد از جملات زیر گزاره هستند؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲ تا ۵ کتاب درسی)

« $\sqrt{-۱}$ عددی حقیقی است.»، «بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.»، «احتمال پیشامد A در پرتاب تاس برابر $\frac{۱}{۲}$ است.»، « x عددی زوج است.»

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۴ ۴- کدام گزینه درست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲ تا ۵ کتاب درسی)

۱) هر گزاره‌نما فقط یک ارزش دارد.

۲) یک گزاره ممکن است برای برخی اعداد درست و برای برخی نادرست باشد.

۳) $۳x + y = ۸$ یک گزاره‌نما است.

۴) هر گزاره با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به گزاره‌نما تبدیل می‌شود.

۵ ۵- دامنه و مجموعهٔ جواب گزاره‌نمای $"x^۲ - ۳x + ۲ = ۰"$ کدام می‌تواند باشد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲ تا ۵ کتاب درسی)

۱) $D = \mathbb{Z}, S_x = \{-۱,۱\}$ ۲) $D = \mathbb{R}, S_x = \{۱,۲\}$

۳) $D = \mathbb{R}, S_x = \{۰\}$ ۴) $D = \mathbb{Z}, S_x = \{۰\}$

۶ ۶- کدامیک از عبارت‌های زیر گزاره‌نما است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲ تا ۵ کتاب درسی)

۱) اگر $۲^n - ۱$ اول باشد، آنگاه n اول است. ۲) معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ - ۴x - ۵ = ۰$ دارای دو ریشه صحیح است.

۳) اگر $p \geq ۵$ عددی اول باشد، آنگاه $p = ۶k \pm ۱$ است. ۴) $۳^n \leq n!$ و $n \in \mathbb{N}$

۷ ۷- دامنه و مجموعهٔ جواب گزاره نمای $"۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + ... + \frac{۱}{n} < \frac{۵n}{۱۲}"$ کدام می‌تواند باشد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲ تا ۵ کتاب درسی)

۱) $D = \mathbb{N}, S = \{۶,۷,۸,...\}$ ۲) $D = \mathbb{Z}, S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

۳) $D = \mathbb{N}, S = \{۱,۲,۳,۴\}$ ۴) $D = \mathbb{Z}, S = \varnothing$

۸ ۸- مجموعه جواب کدام گزاره‌نما با دامنه آن برابر است؟ (p، مجموعهٔ اعداد اول است.) (مرتبط با صفحه‌های ۲ تا ۵ کتاب درسی)

۱) $(D = \mathbb{N})\, ۲^n > n^۲$ ۲) $(D = \mathbb{N})\, ۳^n \leq n!$

۳) $(D = \mathbb{N})\, ۲^n + ۱ \in P$ ۴) $(D = \mathbb{N})\, n^۲ \leq ۴^n$

۹ ۹- اگر دامنهٔ گزاره نمای $"۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۷} + ... + \frac{۱}{۲^n - ۱} < \frac{n}{۲}"$ اعداد طبیعی باشد، کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ جواب این گزاره‌نما کدام است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲ تا ۵ کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰ ۱۰- کدام گزینه صحیح است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲ تا ۵ کتاب درسی)

۱) اگر $D = \mathbb{Z}$، مجموعهٔ جواب گزاره نمای $"x = ۲k"$ برابر $S = \{۲,۴,۶,...\}$ است.

۲) اگر $D = \mathbb{Z}$، مجموعهٔ جواب گزاره نمای $"x^۲ > ۰"$ برابر $S = \mathbb{Z}$ است.

۳) اگر $D = \mathbb{N}$، مجموعهٔ جواب گزاره نمای $"x + ۱ > ۰"$ برابر $S = \mathbb{N}$ است.

۴) اگر $D = \mathbb{N}$، مجموعهٔ جواب گزاره نمای $"x + \frac{۱}{x} > ۲"$ برابر $S = \mathbb{N}$ است.

آشنایی با منطق ریاضی: ترکیب گزاره‌ها

آمار و احتمال: صفحه‌های ۷ تا ۱۳ کتاب درسی

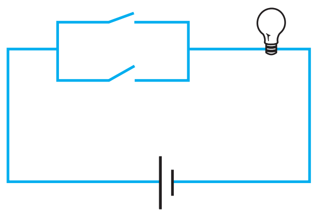
ترکیب گزاره‌ها

۱ـ ترکیب فصلی:

اگر p و q دو گزاره باشند گزارهٔ مرکب « $p \vee q$ » را ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم و به صورت « p یا q » می‌خوانیم. ترکیب فصلی دو گزاره وقتی درست است که حداقل یکی از آن‌ها درست باشد.

اگر در این مدار، بسته بودن هر کلید درست و باز بودن آن نادرست باشد لامپ وقتی روشن است که حداقل یک کلید بسته باشد. روشن بودن لامپ درست و خاموش بودن آن نادرست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

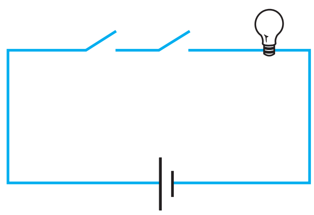


۲ـ ترکیب عطفی:

اگر p و q دو گزاره باشند. گزارهٔ مرکب « $p \wedge q$ » را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم و به صورت « p و q » می‌خوانیم. ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشد.

در این مورد لامپ وقتی روشن می‌شود که هر دو کلید بسته باشد.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن



۳ـ ترکیب شرطی:

اگر p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب « $p \Rightarrow q$ » را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم و به صورت‌های « اگر p آنگاه q » یا « p شرط کافی برای q است» یا « q شرط لازم برای p است» می‌خوانیم. در این گزارهٔ مرکب، p را «مقدم» و q را «تالی» می‌نامند. گزارهٔ شرطی وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

نکته

در عبارت $p \Rightarrow q$، p شرط لازم برای q است و شرط کافی برای q، p است.

قانون انتفای مقدم

در گزاره‌های شرطی « $p \Rightarrow q$ »، اگر مقدم ترکیب شرطی نادرست باشد ارزش گزاره بدون توجه به جدول ارزش گزاره‌های شرطی درست می‌باشد.

p	q	$p \Rightarrow q$	
د	د	د	
د	ن	ن	
ن	د	د	قانون انتفای مقدم
ن	ن	د	قانون انتفای مقدم

قانون انتفای مقدم در بسیاری از اثبات‌ها استفاده می‌شود به طور مثال برای اثبات این‌که $\varnothing$ یک تابع است از این قانون می‌توان استفاده کرد.

نکته

هر گزارهٔ شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

تذکر

در بعضی از مسائل به جای اثبات مستقیم از عکس نقیض استفاده می‌کنیم، مثلاً در اثبات یک‌به‌یک بودن توابع عملاً از عکس نقیض تعریف تابع یک به یک استفاده می‌شود.

نکته

در هر گزارهٔ شرطی داریم:

$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	q	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	د	ن	د

۴ـ ترکیب دو شرطی:

اگر p و q دو گزاره باشند؛ گزارهٔ مرکب « $p \Leftrightarrow q$ » را ترکیب دو شرطی می‌خوانیم و به صورت‌های « اگر p آنگاه q و برعکس» یا « p اگر و تنها اگر q » یا « p شرط لازم و کافی برای q است» می‌خوانیم.

گزارهٔ دو شرطی وقتی درست است که p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

نکته

نقیض و عکس نقیض یک گزارهٔ دو شرطی با خود گزاره هم‌ارز است.

$$p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q \equiv \sim q \Leftrightarrow \sim p$$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$	$\sim q \Leftrightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د	د

قوانین ترکیب گزاره‌ها

اگر p، q و r سه گزاره باشند، قوانین زیر همواره برقرار است:

خاصیت شرکت‌پذیری
۳) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
۴) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

خاصیت جابه‌جایی
۱) $p \vee q \equiv q \vee p$
۲) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

قانون جذب
۷) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
۸) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

خاصیت توزیع‌پذیری
۵) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
۶) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

۱۱) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

قوانین دمورگان
۹) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
۱۰) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

هم‌ارزی‌های مهم

روابط زیر بین گزاره‌ها همواره برقرار است:

۸) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
۹) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
۱۰) $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$ قانون ادخال فاصل
۱۱) $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$ قانون حذف عاطف
۱۲) $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
۱۳) $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
۱۴) $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

۱) $p \vee \sim p \equiv T$
۲) $p \wedge \sim p \equiv F$
۳) $T \vee p \equiv T$
۴) $T \wedge p \equiv p$
۵) $F \vee p \equiv p$
۶) $F \wedge p \equiv F$
۷) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

ترکیب گزاره‌ها

۲۰ سؤال ۲۰ سؤال

۱ **۱۱-** هرگاه $p \wedge q$ نادرست باشد، آنگاه: **(مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)**

۱) p نادرست و q درست است.
۲) p درست و q نادرست است.
۳) گزینه‌های «۱» و «۲»
۴) p نادرست و q نادرست است.

۲ **۱۲-** گزارهٔ $(\sim p \vee p) \wedge (\sim p \wedge p)$: **(مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)**

۱) همواره درست است.
۲) همواره نادرست است.
۳) گاهی درست و گاهی نادرست
۴) اگر p درست باشد، درست است.

۳ **۱۳-** نقیض گزارهٔ «اگر احمد درس بخواند قبول خواهد شد.» کدام است؟ **(مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)**

۱) اگر احمد درس نخواند قبول نمی‌شود.
۲) احمد پسر درس‌خوانی نیست.
۳) احمد درس می‌خواند ولی قبول نمی‌شود.
۴) اگر احمد قبول نشود آنگاه درس نخوانده است.

۴ ۱۴– نقیض گزارهٔ $a \le b$ کدام است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $a > b$ ۲) $a < b$

۳) $a \ge b$ ۴) $a = b$

۵ ۱۵– اگر T گزارهٔ همواره درست باشد، کدام‌یک از هم ارزی‌های زیر همواره نادرست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $T \wedge p \equiv p$ ۲) $T \vee \sim T \equiv T$

۳) $T \wedge \sim T \equiv F$ ۴) $T \vee p \equiv p$

۶ ۱۶– هرگاه F و T به ترتیب گزارهٔ نادرست و درست باشند، کدام یک از روابط زیر نادرست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $\sim F \wedge F \equiv F$ ۲) $p \wedge T \equiv p$

۳) $p \vee F \equiv p$ ۴) $T \wedge F \equiv T$

۷ ۱۷– کدامیک از ترکیب‌های زیر همواره درست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $(p \vee \sim p) \Rightarrow (p \wedge \sim p)$ ۲) $(p \vee \sim p) \Rightarrow p$

۳) $(p \wedge \sim p) \Rightarrow p$ ۴) $p \Rightarrow (p \wedge \sim p)$

۸ ۱۸– اگر p گزاره درست و q و r گزاره‌های دلخواه باشند، کدامیک از گزاره‌های زیر همیشه درست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $p \Rightarrow (q \wedge r)$ ۲) $(p \vee q) \Rightarrow (r \vee q)$

۳) $r \Rightarrow (p \vee q)$ ۴) $(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge q)$

۹ ۱۹– اگر $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ هر دو درست باشند، کدام مورد صحیح است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) p درست و q نادرست است. ۲) p نادرست و q درست است.

۳) $p \equiv q$ ۴) هیچکدام

۱۰ ۲۰– اگر p نادرست و $p \Leftrightarrow q$ درست باشند، آنگاه: (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) q درست است. ۲) $p \wedge q$ درست است.

۳) q نادرست است. ۴) $p \vee q$ درست است.

۱۱ ۲۱– $\sim p \Rightarrow q$ هم ارز است با: (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $\sim p \vee q$ ۲) $p \vee q$

۳) $\sim p \wedge q$ ۴) $p \wedge q$

۱۲ ۲۲– کدام‌یک از هم ارزی‌های زیر نادرست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $\sim(\sim p \vee \sim q) \equiv p \wedge q$ ۲) $\sim(p \wedge \sim q) \equiv p \vee q$

۳) $\sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$ ۴) $p \Rightarrow q \equiv p \wedge \sim q$

۱۳ ۲۳– ارزش گزارهٔ $\sim(p \vee q) \wedge p$: (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) همواره درست است. ۲) همواره نادرست است.

۳) گاهی درست و گاهی نادرست است. ۴) اگر p درست باشد، درست است.

۱۴ ۲۴– ارزش گزارهٔ $p \vee (p \Rightarrow q)$: (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) همواره درست است. ۲) همواره نادرست است.

۳) گاهی درست و گاهی نادرست ۴) بستگی به درستی q دارد.

۱۵ ۲۵– گزارهٔ $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ هم ارز است با: (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $\sim p$ ۲) p

۳) q ۴) $\sim q$

۱۶ ۲۶– گزارهٔ $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$ هم ارز است با: (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) q ۲) $\sim q$

۳) p ۴) $\sim p$

۱۷ ۲۷– گزارهٔ $\sim p \vee (\sim p \wedge q)$ هم ارز است با: (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) p ۲) q

۳) $\sim p$ ۴) $\sim q$

۱۸ ۲۸- گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \vee [(p \Rightarrow q) \wedge r]$ هم ارز است با: (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $p \Rightarrow q$ ۲) $p \wedge \sim q$

۳) $p \wedge q$ ۴) $p \vee q$

۱۹ ۲۹- گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \wedge [(p \Rightarrow q) \vee r]$ هم ارز است با: (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $p \vee q$ ۲) $\sim p \vee q$

۳) $p \wedge q$ ۴) $\sim p \wedge q$

۲۰ ۳۰- گزارهٔ $\sim (p \Rightarrow q) \vee p$ هم ارز است با: (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) q ۲) p

۳) $p \vee q$ ۴) $p \wedge q$

۱ ۳۱- کدام‌یک از گزاره‌های شرطی زیر، یک استلزام منطقی است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $\sim q \Rightarrow p$ ۲) $p \Rightarrow p \vee q$

۳) $\sim p \vee p \Rightarrow p$ ۴) $p \Rightarrow p \wedge q$

۲ ۳۲- کدامیک از گزاره‌های زیر همواره نادرست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $p \Rightarrow \sim p \vee q$ ۲) $p \Leftrightarrow q$

۳) $p \vee q \Rightarrow q$ ۴) $p \wedge \sim (q \Rightarrow p)$

۳ ۳۳- کدام عبارت گزارهٔ «... برای آن‌که $\tan x = \tan y$ آن است که $x = y$.» را به درستی تکمیل می‌کند؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) شرط لازم ۲) شرط کافی

۳) شرط لازم و کافی ۴) هیچکدام

۴ ۳۴- گزارهٔ $p \wedge q$ هم ارز با کدام گزارهٔ ترکیبی است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $\sim (q \Rightarrow p)$ ۲) $\sim (\sim p \Rightarrow q)$

۳) $\sim (p \Rightarrow \sim q)$ ۴) $\sim (p \Rightarrow q)$

۵ ۳۵- اگر p یک گزاره درست و q گزاره‌ای دلخواه باشد، کدام‌یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $\sim p \Rightarrow q$ ۲) $p \Rightarrow q$

۳) $q \Rightarrow \sim p$ ۴) $\sim q \Rightarrow \sim p$

۶ ۳۶- ارزش کدام گزاره درست نیست؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $(۲+۲=۴ \ \vee \ ۲>۴)$ ۲) $(۲+۲=۵ \ \vee \ ۴>۵)$

۳) $(۱+۱=۲ \ \vee \ ۴>۲)$ ۴) $(۱+۱=۳ \ \vee \ ۴>۲)$

۷ ۳۷- اگر گزاره‌های «عدد ۶ مضرب ۲ است» : p و «عدد ۶ مضرب ۳ است» : q مفروض باشند گزارهٔ $\sim p \vee \sim q$ به کدام صورت خوانده می‌شود؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) عدد ۶ مضرب ۲ یا ۳ است. ۲) عدد ۶ نه مضرب ۳ و نه مضرب ۲ است.

۳) عدد ۶ مضرب ۲ است ولی مضرب ۳ نیست. ۴) عدد ۶ مضرب ۳ نیست یا مضرب ۲ نیست.

۸ ۳۸- آخرین ستون جدول ارزش گزاره $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱)	۲)	۳)	۴)
ن	د	د	د
ن	د	ن	د
ن	د	د	ن
ن	د	د	ن

۹ ۳۹- ارزش کدام گزاره همواره نادرست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $\sim (p \wedge q) \vee (p \vee q)$ ۲) $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$

۳) $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$ ۴) $(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$

۱۰ ۴۰- هم ارز گزاره $\sim p \Rightarrow q$ کدام است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $q \Rightarrow \sim p$
۲) $\sim q \Rightarrow p$
۳) $p \Rightarrow q$
۴) $p \Rightarrow \sim q$

۱۱ ۴۱- برای اثبات «اگر n^2 بر ۳ بخش‌پذیر باشد، آنگاه n نیز بر ۳ بخش‌پذیر است» بهتر است کدام گزینه را اثبات کنیم؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) اگر n بر ۳ بخش‌پذیر باشد آنگاه n^2 بر ۳ بخش‌پذیر نیست.
۲) اگر n بر ۳ بخش‌پذیر نباشد آنگاه n^2 بر ۳ بخش‌پذیر است.
۳) اگر n بر ۳ بخش‌پذیر باشد آنگاه n^2 بر ۳ بخش‌پذیر است.
۴) اگر n بر ۳ بخش‌پذیر نباشد آنگاه n^2 بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

۱۲ ۴۲- کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $-۳ < -۲ \Leftrightarrow ۳ > ۲$
۲) اگر عدد ۴ فرد باشد، آن‌گاه ۴ مربع کامل نیست.
۳) ۲ عدد اول نیست اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.
۴) $(\frac{۱}{۲} \neq \frac{۳}{۶}) \vee (۱ \in \{۲,۳,۴\})$

۱۳ ۴۳- اگر گزاره‌های $p \Rightarrow \sim q$ ، $q \Rightarrow r$ و $p \Rightarrow \sim r$ به‌ترتیب درست، درست و نادرست باشند، آن‌گاه: (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) p، q و r هر سه نادرست هستند.
۲) p و q نادرست هستند و r درست است.
۳) p، q و r هر سه درست هستند.
۴) p و r نادرست هستند و q درست است.

۱۴ ۴۴- نقیض گزارهٔ $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ کدام است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $p \vee q \Rightarrow r$
۲) $p \wedge q \Rightarrow r$
۳) $p \Rightarrow q \wedge r$
۴) $p \Rightarrow q \vee r$

۱۵ ۴۵- اگر p درست و q نادرست باشد ارزش گزارهٔ $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ کدام است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) درست
۲) نادرست
۳) با ارزش $p \wedge q$ برابر است.
۴) با ارزش $p \Rightarrow r$ برابر است.

۱۶ ۴۶- در جدول مقابل به جای گزاره p کدام گزینه را می‌توان قرار داد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

p	q	$p \Rightarrow q$
	$۱۱^{۱۳}$ عددی اول است.	د

۱) عدد ۶۴ را نمی‌توان به صورت جمع سه عدد متوالی نوشت.
۲) اگر $۲ \times ۲ = ۴$ آنگاه $۲ + ۲ = ۴$.
۳) عکس نقیض هر گزاره شرطی همواره درست است.
۴) $(\frac{۱}{۲} = \frac{۴}{۸}) \vee ۲^۳ = ۸$.

۱۷ ۴۷- هر گاه $\sim p \wedge \sim q$ درست باشد آنگاه: (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) p نادرست و q درست است.
۲) p درست و q نادرست است.
۳) p و q هر دو درست‌اند.
۴) p نادرست و q نادرست است.

۱۸ ۴۸- نقیض گزاره «اگر a زوج باشد، $a+۱$ فرد خواهد بود» کدام است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) نه a زوج است و نه $a+۱$ فرد است.
۲) a زوج است ولی $a+۱$ فرد است.
۳) a زوج است ولی $a+۱$ فرد نیست.
۴) a زوج نیست ولی $a+۱$ فرد است.

۱۹ ۴۹- اگر گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow q$ هر دو درست باشند کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) p
۲) $\sim p$
۳) q
۴) $\sim q$

۲۰ ۵۰- نقیض گزارهٔ $p \Rightarrow q$ کدام است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱) $\sim p \wedge q$
۲) $p \wedge \sim q$
۳) $\sim p \Rightarrow q$
۴) $p \Rightarrow \sim q$

آشنایی با منطق ریاضی: سورها و نقیض آن‌ها

آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی

سورها و نقیض آنها

سور در لغت به معنای حصار و دیوار است که باعث محدودیت یک منطقه می‌شود. هرگاه در ریاضیات بخواهیم برای متغیرها محدودیت ایجاد کنیم از سورها استفاده می‌کنیم که به سه دسته تقسیم می‌شوند.

۱) سور عمومی: اگر بخواهیم خاصیتی را به همه اعضای یک مجموعه نسبت دهیم و یا برای یک گزاره‌نما نشان دهیم که متغیر، همهٔ مقادیر دامنه می‌تواند باشد از سور عمومی استفاده می‌کنیم و آن را با نماد $\forall$ نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم «به ازای هر» عضو از دامنه گزاره‌نمای $p(x)$ برقرار است و می‌نویسیم: $(\forall x;p(x))$

■ مثال ۱: به ازای هر عدد حقیقی مانند x داریم: $\forall x\in R;x^۲\geq ۰\equiv x^۲\geq ۰$

به ازای هر عدد صحیح مانند x داریم: $\forall x\in Z;x^۲+۱\neq ۰\equiv x^۲+۱\neq ۰$

۲) سور وجودی: اگر بخواهیم خاصیتی را به بعضی از اعضای یک مجموعه نسبت دهیم و یا برای یک گزاره‌نما نشان دهیم که متغیر بعضی از مقادیر دامنه را می‌تواند بپذیرد از سور وجودی استفاده می‌کنیم و آن را با نماد $\exists$ نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم «وجود دارد» و یا «به ازای بعضی از مقادیر» از دامنه، گزاره‌نمای $p(x)$ برقرار است و می‌نویسیم: $(\exists x:p(x))$

■ مثال ۲: به ازای بعضی از اعداد حقیقی معادلهٔ روبه‌رو برابر صفر است. $x^۲-۲x+۱=۰$

$\exists x\in R;x^۲-۲x+۱=۰$

۳) سور صفر: اگر بخواهیم خاصیتی را از همه اعضای مجموعه سلب کنیم و یا برای یک گزاره‌نما نشان دهیم که هیچ متغیری به ازای مقادیر دامنه در گزاره‌نما صدق نمی‌کند از سور صفر استفاده می‌کنیم. آن‌را با نماد $\nexists$ نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم «وجود ندارد» یا «به ازای هیچ مقدار» از دامنه، گزاره‌نمای $p(x)$ برقرار است و می‌نویسیم: $(\nexists x;p(x))$

نکته: عبارت‌هایی که با سورها بیان می‌شوند همگی گزاره هستند که یا ارزش درست و یا ارزش نادرست دارند.

نکته: گزاره‌هایی که با سور عمومی بیان می‌شوند هیچ مثال نقضی ندارند.

نکته: گزاره‌هایی که با سور وجودی بیان می‌شوند وقتی درست هستند که مجموعه جواب آنها مخالف تهی باشد.

نقیض سورها

$۱)\sim(\forall x;p(x))\equiv \exists x;\sim p(x)$

$۲)\sim(\exists x;p(x))\equiv \forall x;\sim p(x)\equiv \nexists x;p(x)$

■ مثال ۳: نقیض هر یک از سورهای زیر نوشته شده است:

$\sim(\forall x\in \mathbb{R};x^۲\geq ۰)\equiv \exists x\in \mathbb{R};\ x^۲<۰$

$\sim(\exists x\in \mathbb{R};\ x+۱=۱۰)\equiv \forall x\in \mathbb{R}\ \ x+۱\neq ۱۰\equiv \nexists x\in \mathbb{R};x+۱=۱۰$

$\sim(\forall x\in \mathbb{R};\exists y\in \mathbb{R};\ x+y=۱)\equiv \exists x\in \mathbb{R};\forall y\in \mathbb{R},\ x+y\neq ۱$

سورها و نقیض آن‌ها

۲۰ سؤال

۱ ۵۱- چه سوری قرار دهیم تا گزاره‌نمای $\sin x\times\cot x=\cos x$ همواره درست باشد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی)

۱) $\forall x\in \mathbb{R}-\{۰\}$
۲) $\nexists x\in \mathbb{R}$
۳) $\forall x\in \mathbb{R}-\{x\,|\,x=k\pi,k\in \mathbb{Z}\}$
۴) $\forall x\neq ۰$

۲ ۵۲- چه سوری قرار دهیم تا گزاره‌نمای $x^۲-۵x+۶\leq ۰$ همواره گزارهٔ درستی باشد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی)

۱) $\nexists x\in \mathbb{R}$
۲) $\exists x\in \mathbb{R}$
۳) $\forall x\in \mathbb{R}$
۴) $\forall x\in \mathbb{R}-\{۲,۳\}$

۳ ۵۳– کدام گزینه درست است؟ (P ، مجموعهٔ اعداد اول است.) **(مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی)**

۱) $\exists n \in \mathbb{N} \; ; (2^n - 1) \notin P$
۲) $\forall n \in \mathbb{N} \; ; (2^n + 1) \in P$
۳) $\forall n \in \mathbb{N} \; ; 3^n < n!$
۴) $\exists n \in \mathbb{N} \; ; 3^n \le n^2$

۴ ۵۴– کدام گزینه نادرست است؟ **(مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی)**

۱) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; x^2 \ge 0$
۲) $\forall n \in \mathbb{N} \; ; n^3 - n = 3k$
۳) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; x^2 + 2x + 5 > 0$
۴) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; x + \frac{1}{x} \le 2$

۵ ۵۵– کدام گزینه نشان دهنده سور «برخی از اعداد اول و زوج هستند.» است؟ (P مجموعهٔ اعداد اول O مجموعهٔ اعداد فرد و E مجموعهٔ اعداد زوج است.) **(مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی)**

۱) $\forall x \in \mathbb{N} \; ; x \in P \wedge x \in E$
۲) $\exists x \in \mathbb{N} \; ; x \in P \wedge x \in O$
۳) $\exists x \in \mathbb{N} \; ; x \in P \wedge x \in E$
۴) $\forall x \in \mathbb{N} \; ; x \in P \vee x \in E$

۶ ۵۶– کدام گزینه نادرست است؟ **(مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی)**

۱) $\forall x,y \in \mathbb{R} \; ; (x-2)^2 + (y-2)^2 \le 4$
۲) $\exists x,y \in \mathbb{R} \; ; (x-2)^2 + (y-2)^2 \le 4$
۳) $\exists x,y \in \mathbb{R} \; ; (x-2)^2 + (y-2)^2 = 0$
۴) $\forall x,y \in \mathbb{R} \; ; x^2 + y^2 \ge 0$

۷ ۵۷– گزاره « $\exists x \in \mathbb{R} \; ; x^2 < x$ » به زبان فارسی برابر کدام گزینه است؟ **(مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی)**

۱) وجود دارد عدد حقیقی که اگر به توان ۲ برسد برابر خود است.
۲) مربع هر عدد حقیقی از خودش کوچک‌تر است.
۳) هر عدد حقیقی از خودش کوچک‌تر است.
۴) مربع برخی اعداد حقیقی از خودش کوچک‌تر است.

۸ ۵۸– نقیض گزارهٔ $(\forall x \in \mathbb{N} \; ; x^2 \ge x)$ کدام است؟ **(مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی)**

۱) $\exists x \in \mathbb{N} \; ; x^2 \le x$
۲) $\exists x \in \mathbb{N} \; ; x^2 \ge 0$
۳) $\nexists x \in \mathbb{N} \; ; x^2 \le x$
۴) $\exists x \in \mathbb{N} \; ; x^2 < x$

۹ ۵۹– نقیض کدام‌یک از گزاره‌های زیر به‌درستی بیان نشده است؟ **(مرتبط با صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)(آزمون کانون – ۹۵)**

۱) گزاره: «هر مربع، یک لوزی است.»- نقیض گزاره: «مربعی وجود دارد که لوزی نیست.»
۲) گزاره: «مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.»- نقیض گزاره: «هر مستطیل، یک مربع است.»
۳) گزاره: «مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.»- نقیض گزاره: «چهارضلعی محدبی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن بیش‌تر از 360° است.»
۴) گزاره: «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.»- نقیض گزاره: «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»

۱۰ ۶۰– نقیض گزارهٔ «هیچ مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه ندارد.» کدام است؟ **(مرتبط با صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)(آزمون کانون – ۹۵)**

۱) هر مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه دارد.
۲) هر مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه ندارد.
۳) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویهٔ قائمه ندارد.
۴) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویهٔ قائمه دارد.

۱۱ ۶۱– نقیض گزارهٔ $(\nexists x \in \mathbb{R} \; ; |x+y| \le |x| + |y|)$ کدام است؟ **(مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی)**

۱) $\exists x \in \mathbb{R} \; ; |x+y| \le |x| + |y|$
۲) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; |x+y| > |x| + |y|$
۳) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; |x+y| \ge |x| + |y|$
۴) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; |x+y| \le |x| + |y|$

۱۲ ۶۲– نقیض گزارهٔ $\forall x \in \mathbb{R} \; ; x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$ کدام است؟ **(مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی)**

۱) $\forall x \in \mathbb{Z} \; ; x^2 > 0 \Rightarrow x > 0$
۲) $\forall x \in \mathbb{Z} \; ; x \le 0 \Rightarrow x^2 > 0$
۳) $\exists x \in \mathbb{R} \; ; (x > 0) \wedge (x^2 \le 0)$
۴) $\exists x \in \mathbb{R} \; ; (x \le 0) \wedge (x^2 > 0)$

۱۳ ۶۳- نقیض گزارهٔ $\forall x \in \mathbb{R};(x^2 > 0) \vee (x \leq 0)$ کدام است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی)

۱) $\exists x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 \leq 0 \vee x > 0$
۲) $\exists x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 \leq 0 \wedge x > 0$
۳) $\exists x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 > 0\ ,\ x > 0$
۴) $\exists x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 \leq 0 \wedge x \leq 0$

۱۴ ۶۴- ارزش کدام سور درست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی)

۱) $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 \geq x$
۲) $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \cos x \times \tan x = \sin x$
۳) $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$
۴) $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 + 2 \neq 0$

۱۵ ۶۵- کدام گزینه درست است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی)

۱) $\sim(\exists x\ ;\ P(x)) \equiv \exists x\ ;\ \sim P(x)$
۲) $\sim(\forall x\ ;\ P(x)) \equiv \exists x\ ;\ P(x)$
۳) $\sim(\forall x\ ;\ P(x)) \equiv \exists x\ ;\ \sim P(x)$
۴) $\sim(\exists x\ ;\ P(x)) \equiv \forall x\ ;\ P(x)$

۱۶ ۶۶- نقیض گزارهٔ $\exists x \in \mathbb{Z}\ ;\ \left(\frac{x+1}{x-1} = 0\right) \wedge (x \neq 1)$ به کدام صورت است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی)

۱) $\forall x \in \mathbb{Z}\ ;\ \left(\frac{x+1}{x-1} = 0\right) \wedge (x = 1)$
۲) $\forall x \in \mathbb{Z}\ ;\ \left(\frac{x+1}{x-1} \neq 0\right) \vee (x = 1)$
۳) $\exists x \in \mathbb{Z}\ ;\ \left(\frac{x+1}{x-1} \neq 0\right) \vee (x = 1)$
۴) $\exists x \in \mathbb{Z}\ ;\ \left(\frac{x+1}{x-1} \neq 0\right) \wedge (x = \pm 1)$

۱۷ ۶۷- نقیض گزارهٔ «هیچ کدام از اعداد گویا، گنگ نیستند.» با نماد ریاضی به کدام صورت است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی)

۱) $\exists x\ ;\ x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \notin Q'$
۲) $\exists x\ ;\ x \in \mathbb{Q} \wedge x \in Q'$
۳) $\forall x\ ;\ x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \notin Q'$
۴) $\forall x\ ;\ x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x \in Q'$

۱۸ ۶۸- ارزش گزارهٔ $\forall x \in R\ ;\ x^2 \geq x$، . . . می‌باشد و نقیض آن به‌صورت . . . است. (مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۱۷ آذر ۹۶)

۱) نادرست، $\exists x \in R; x^2 \leq x$
۲) درست، $\forall x \in R; x^2 < x$
۳) نادرست، $\exists x \in R; x^2 < x$
۴) درست، $\exists x \in R; x^2 \leq x$

۱۹ ۶۹- نقیض گزارهٔ $\forall x\ ;\ p(x) \wedge \exists x\ ;\ q(x)$ کدام است؟ (مرتبط با مثال صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۱) $(\exists x;\sim p(x)) \vee (\forall x;\sim q(x))$
۲) $(\forall x;\sim p(x)) \wedge (\exists x;\sim q(x))$
۳) $(\forall x;p(x)) \wedge (\exists x;q(x))$
۴) $(\forall x;\sim p(x)) \vee (\exists x;\sim q(x))$

۲۰ ۷۰- کدام گزینه، گزارهٔ « $\forall x \in P - \{2,3\};\ \exists k \in N;(x = 6k+1) \vee (x = 6k-1)$ » را بیان می‌کند؟ (P مجموعهٔ اعداد اول و k عددی طبیعی است.) (مرتبط با صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۱۹ آبان ۹۶)

۱) هر عدد اول بزرگتر از ۳ به صورت $6k+1$ یا $6k-1$ است.
۲) اگر عددی به صورت $6k+1$ یا $6k-1$ باشد عددی اول غیر از ۲ و ۳ است.
۳) مقداری مانند k در مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود دارد، طوری که $6k+1$ یا $6k-1$، عدد اول و بزرگتر از ۳ باشد.
۴) اگر عددی عضو مجموعهٔ اعداد اول غیر از ۲ و ۳ باشد، آن‌گاه قطعاً ۶ برابرش به علاوه یا منهای یک، عدد اول است.

آمار و احتمال:
صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱ کتاب درسی

مجموعه ـ زیر مجموعه: تعریف مجموعه و تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه

تعریف مجموعه و تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه

تعریف مجموعه: بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص (عضویت این اشیا در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز را مجموعه می‌گویند.

به طور مثال:

$A=\{۲,۳,۵,۷\}$ $B=\{a,b,c,d\}$ $C=\{\alpha,\beta,\chi,\theta\}$ $D=\{۱,۲,۳,...\}$

توجه

در مجموعه‌ها تکرار و جابجایی وجود ندارد. یعنی: $\{a,b\}=\{b,a\}$ ، $\{a,a\}=\{a\}$

عضویت در مجموعه: به هر یک از عناصر یک مجموعه عضو آن مجموعه گفته می‌شود و اگر a عضوی از مجموعهٔ A باشد در این‌صورت به شکل $a\in A$ نمایش داده می‌شود و اگر عضوی به مجموعهٔ A تعلق نداشته باشد، با علامت $\notin$ نمایش می‌دهند.

به‌طور مثال اگر $A=\{۱,\{۱\},۲\}$ مفروض باشد می‌توان نوشت:

$۱\in A$, $\{۱\}\in A$, $\{\{۱\}\}\notin A$, $\{۱,۲\}\notin A$ $۲\in A$

مجموعهٔ تهی: مجموعه‌ای را که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعهٔ تهی گویند و آن را با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نمایش می‌دهند.

زیرمجموعه

تعریف: مجموعهٔ A را زیرمجموعهٔ B می‌نامند، اگر هر عضو که در مجموعهٔ A انتخاب کنیم در مجموعهٔ B نیز قرار داشته باشد و آن را با نماد $A\subseteq B$ نمایش می‌دهند؛ به عبارت دیگر: $(\forall x\in A\Rightarrow x\in B)\Leftrightarrow A\subseteq B$

و اگر عضوی در مجموعهٔ A پیدا شد که در مجموعهٔ B قرار نداشته باشد، A زیر مجموعهٔ B نیست و آن را با نماد $A\not\subseteq B$ نشان می‌دهند.

پس $\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,d\}$ ولی $\{a,e\}\not\subseteq\{a,b,c,d\}$

نکته

۱) تهی زیرمجموعه تمام مجموعه‌ها است: $\varnothing\subseteq A$

۲) هر مجموعه‌ای زیرمجموعه خودش است: $A\subseteq A$

۳) اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ آنگاه $A\subseteq C$

۴) دو مجموعه A و B با یکدیگر برابرند اگر و فقط اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$. $(A=B\Leftrightarrow A\subseteq B,B\subseteq A)$

۵) اگر مجموعه‌ای n عضو داشته باشد تعداد زیر مجموعه‌های آن برابر ۲^n است.

۶) تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی برابر $\binom{n}{k}$ است.

۷) تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی که شامل عضو به‌خصوصی می‌باشد برابر $\binom{n-۱}{k-۱}$ است.

۸) تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی که فاقد عضو به‌خصوصی است برابر $\binom{n-۱}{k}$ است.

۹) تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی که شامل عضو x و فاقد عضو y است برابر $\binom{n-۱-۱}{k-۱}$ است.

تعریف مجموعه و تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه

۲۰ سؤال

۱ ۷۱– مجموعهٔ $A=\{۱,\{۱\},\{۱,\phi\},\{\phi,۱,\{\ \}\},\{\{\ \},۱\}\}$ چند عضو دارد؟ (مرتبط با صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲

۲ ۷۲– در مجموعهٔ $A=\{\{a\},\{\{a\}\}\}$ کدام گزینه نادرست است؟ (مرتبط با صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی)

۱) $\{a\}\in A$ ۲) $\{\{a\}\}\in A$

۳) $\{a\}\subseteq A$ ۴) $\{\{\{a\}\}\}\not\subseteq A$

۳ ۷۳– اگر $A=\{a\}$، $B=\{a,\{a\}\}$ و $C=\{\{a\},\{a,\{a\}\}\}$ باشند، کدام رابطه نادرست است؟ (مرتبط با صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی)

۱) $A\in B$ ۲) $B\in C$ ۳) $\{\{a\}\}\not\subseteq B$ ۴) $\{\{a,\{a\}\}\}\in C$

۴ ۷۴– اگر $A=\{۲\}$، $B=\{۳,۵,\{۲\}\}$ و $C=\{\{\{۲\},۳,۵\},۲\}$ باشند، کدام گزینه نادرست است؟
(مرتبط با صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون – ۹۵)

۱) $A\in B$ ۲) $A\in C$ ۳) $B\in C$ ۴) $A\subseteq C$

۵ ۷۵– اگر $A=\{\{\},\{\{\ \}\},\{\{\},\{\{\ \}\}\}\}$ مفروض باشد، کدام گزینه درست است؟ (مرتبط با صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی)

۱) $\forall x\in A\Rightarrow x\subseteq A$ ۲) $\forall x\subseteq A\Rightarrow x\in A$

۳) $\forall x,y\in A\Rightarrow x\in y$ یا $y\in x$ ۴) گزینه‌های ۱ و ۳

۶ ۷۶– چند زیر مجموعه از مجموعهٔ $\{a,b,\{b,a\},\{a,b\}\}$ عضو $\{a,b\}$ را ندارند؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ کتاب درسی) (آزمون سراسری – ۹۱)

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۱۲

۷ ۷۷– اگر $A=\{a,b,\{a\},\{a,b\}\}$ و $B=\{a,b\}$، مجموعهٔ $A-\{B\}$ چند زیر مجموعهٔ غیرتهی دارد؟
(مرتبط با صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ کتاب درسی) (آزمون سراسری – ۸۹)

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۱۵

۸ ۷۸– اگر $A=\{a,b,\{a\},\{b\}\}$ باشد، مجموعهٔ $A-\{A\}$ چند زیر مجموعهٔ غیرتهی دارد؟
(مرتبط با صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ کتاب درسی) (سراسری خارج از کشور – ۸۹)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۵

۹ ۷۹– مجموعهٔ A، ۵ عضو بیشتر از مجموعه A' دارد. خارج قسمت یا تفاضل تعداد زیرمجموعه‌های این دو مجموعه کدام است؟
(مرتبط با صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ کتاب درسی) (آزمون سراسری – ۸۶)

۱) خارج قسمت ۲۵ ۲) خارج قسمت ۳۲

۳) تفاضل ۲۵ ۴) تفاضل ۳۲

۱۰ ۸۰– مجموعهٔ $\{a,b,\{a\},\{b\}\}$ دارای چند زیرمجموعه شامل عضو a می‌باشد؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ کتاب درسی) (آزمون سراسری – ۸۲)

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۱ ۸۱– اگر دو عضو از اعضای مجموعهٔ A را حذف کنیم تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود. A چند عضو دارد؟
(مرتبط با صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ کتاب درسی)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۱۲ ۸۲– مجموعهٔ A دارای n عضو است. اگر دو عضو متمایز به A اضافه کنیم، تعداد ۹۶ زیرمجموعه به تعداد زیرمجموعه‌های A اضافه می‌شود. n کدام است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۳ ۸۳– تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e,f\}$ که شامل عضو a باشد، کدام است؟ (مرتبط با صفحه ۲۰ کتاب درسی)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۴ ۸۴– تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی آن است. این مجموعه چند زیر مجموعهٔ ۵ عضوی دارد؟ (مرتبط با صفحه ۲۰ کتاب درسی)

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۱ ۴) ۲۸

۱۵ ۸۵– اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی یک رقمی باشد، چند زیرمجموعهٔ ۵ عضوی می‌توان برای آن نوشت به‌طوری که شامل ۲ و ۱ باشند ولی شامل ۳ و ۴ نباشند؟ (مرتبط با صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ کتاب درسی)

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱