

استاتیک و مقاومت مصالح در مهندسی پزشکی

مدرس: دکتر ندا نازپرور

منابع

• کتاب استاتیک

نوشته: بیر جانسون

مترجم: ابراهیم واحدیان

• کتاب مقاومت مصالح

نوشته: بیر جانسون

مترجم: ابراهیم واحدیان

ارزشیابی

آزمون میان ترم 10 نمره

آزمون پایان ترم 10 نمره

حضور در کلاس و کوییز 2 نمره

تحویل تمرین 2 نمره

مباحث

استاتیک:

تعریف نیرو و گشتاور

شناخت برداری نیرو و گشتاور

جمع نیروها و گشتاورها

تجزیه نیروها

انتقال نیرو

تعادل و شرایط آن

سیستم های استاتیکی

خرپا

مقاومت مصالح:

تعریف تنش و کرنش

قانون هوک

ضریب پواسون

کشش

پیچش

خمش

مخازن استوانه ای و کروی و جدار نازک

دایره موهر تنش

مقدمه

تعریف مکانیک:

مکانیک شاخه ای از علم فیزیک است که راجع به تعادل و حرکت اجسام مادی که تحت اثر نیروها و محرک ها قرار گرفته اند بحث میکند.

مکانیک به سه دسته تقسیم میشود:

- ۱- مکانیک اجسام صلب
- ۲- مکانیک اجسام غیر صلب
- ۳- مکانیک سیالات

مقدمه

مکانیک اجسام صلب:
در خصوص اجسام صلب ساکن یا متحرک بحث میکند.

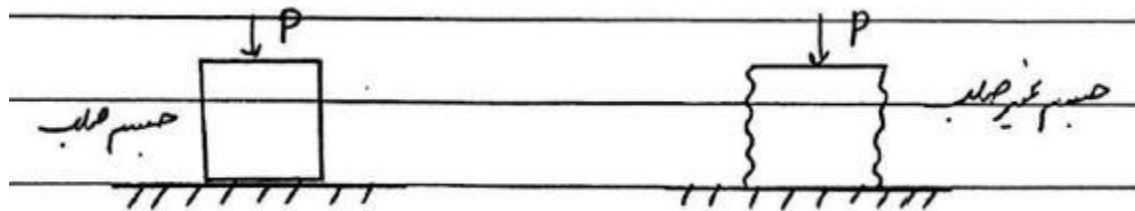
۲ دسته:

۱- استاتیک: اجسام صلب ساکن

۲- دینامیک: اجسام صلب متحرک

مقدمه

- تعریف جسم:
- عبارت است از مجموعه ای از ذرات مادی که به انواع جامد، مایع و گاز تقسیم میشود.
- تعریف جسم صلب:
- در اثر اعمال نیرو تغییر شکل در آن بوجود نیاید.



مقدمه

مفاهیم بنیادی در جسم صلب:

طول: از طول برای مشخص کردن اندازه یک سیستم فیزیکی و یا تعیین موقعیت یک نقطه استفاده میکنند.

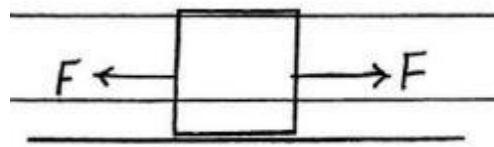
زمان: در مکانیک کلاسیک وسیله ای است که با تغییر و تحول بوجود می آید.

جرم: به مقدار ماده موجود در یک جسم جرم آن جسم گفته می شود.

مقدمه

قوانین نیوتن

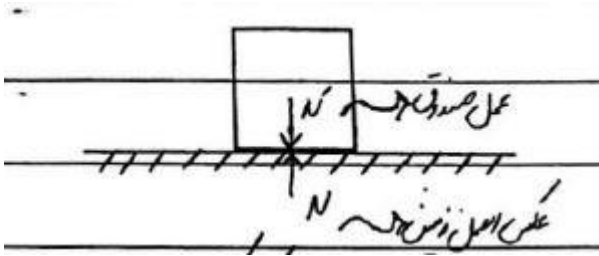
قانون اول: هرگاه برآیند نیروهای وارد بر ذره ای صفر باشد آن ذره در حالت ساکن باشد، همواره در همان حالت خواهد ماند و اگر در حال حرکت باشد، به حرکت یکنواخت مستقیم الخط خود ادامه می دهد.



قانون دوم: هرگاه به جسمی نیرویی از خارج وارد شود و جسم در جهت آن شتاب بگیرد، اندازه شتاب با نیرو نسبت مستقیم و با جرم نسبت عکس دارد.

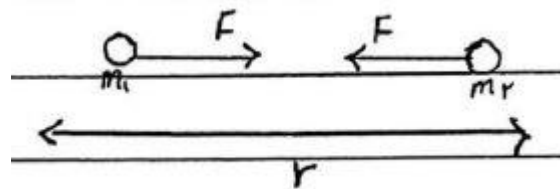
مقدمه

قانون سوم: هرگاه از طرف جسمی بر جسم دیگر نیرویی وارد شود، جسم دوم نیز نیرویی به همان اندازه و در خلاف جهت بر جسم اول وارد میشود.



قانون چهارم: هرگاه دو جسم به فاصله r از یکدیگر قرار داشته باشند، به هم نیروی گرانش (جاذبه) وارد میکنند. بطوریکه اگر جسم اول دارای جرم m_1 و جسم دوم دارای جرم m_2 باشد، نیروی جاذبه به شکل زیر بین آن برقرار است:

$$F = G (m_1 \cdot m_2) / r^2$$



نیرو

تعریف:

نیرو عاملی است که بر ذرات مادی و اجسام اثر میکند و در این تاثیر سعی دارد که آن ها را جابجا کند و به حرکت درآورد.

نیرو باعث میشود شکل ظاهری ماده تغییر کند، پس نیروها از روی تاثیری که بر ذرات و اجسام میگذارند شناسایی و اندازه گیری می شوند.

نیرو

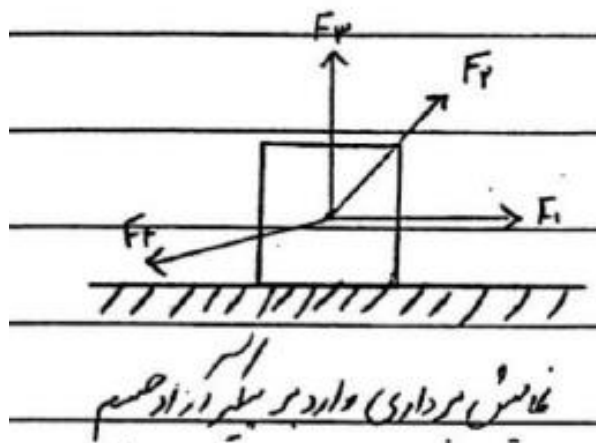
خاصیت برداری

۱- امتداد یا راستا

۲- مقدار

۳- جهت

۴- نقطه اثر



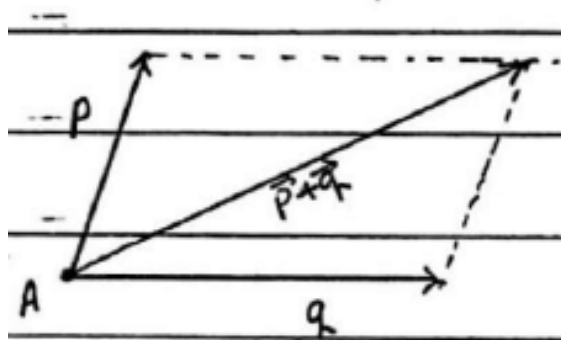
در حالت کلی به یک جسم ممکن است نیروهای متعددی وارد شود.

برای به دست آوردن برایندها از دو روش میتوان استفاده کرد: ترسیم، محاسباتی

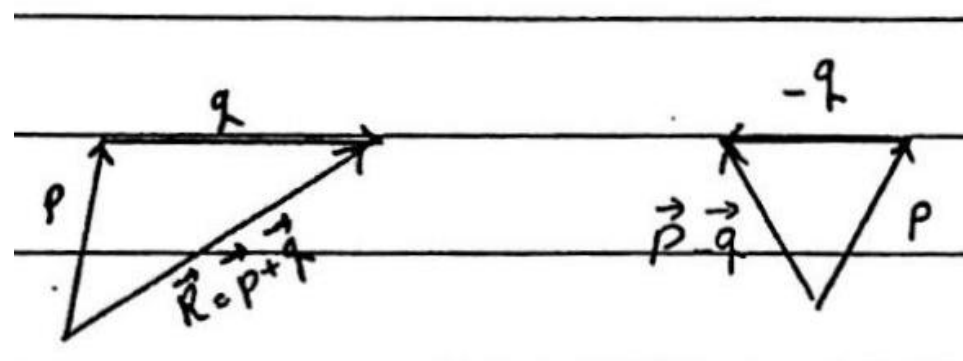
نیرو

برایند نیروها

هنگامی که راستای دو نیرو در یک نقطه متقاطع باشد، نیروی برآیند از جمع برداری دو نیروی متقاطع بدست می آید.

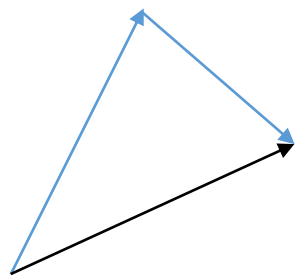


روش متوازی الاضلاع: برایند دو نیرو قطر متوازی الاضلاع
روش مثلث: برایند برداری است که ابتدای بردار اول را به
انتهای بردار آخر متصل میکند.

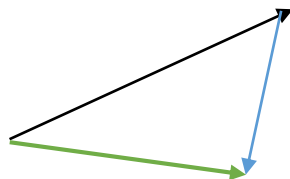


نیرو

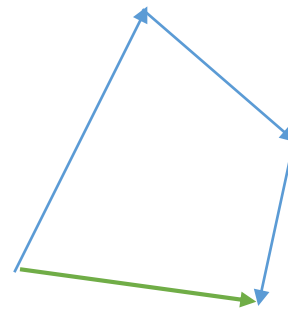
برایند سه بردار:



$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$$



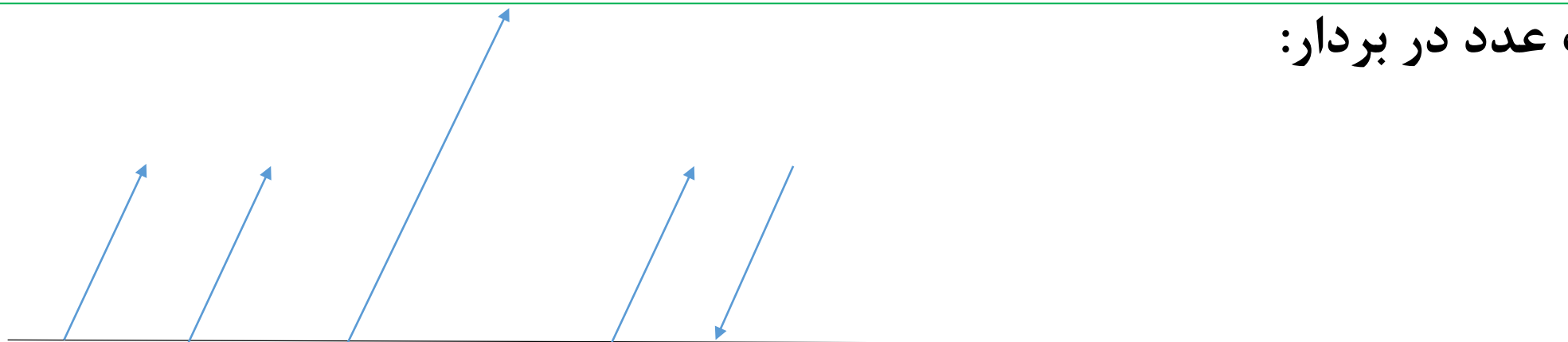
$$\vec{r} + \vec{s} = \vec{t}$$



$$\vec{p} + \vec{q} + \vec{s} = \vec{t}$$

نیرو

ضرب عدد در بردار:

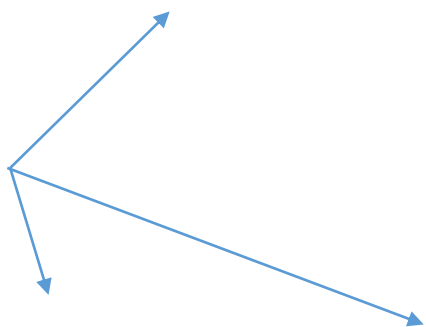


$$\begin{array}{ccc} \vec{P} & \vec{F=1P} & \vec{F=rP} \\ r=1 & & \end{array}$$

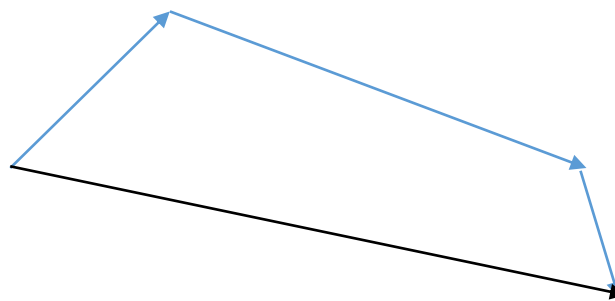
$$\begin{array}{ccc} \vec{P} & \vec{F=-1P} & \\ r=-1 & & \end{array}$$

نیرو

برایند چندین نیرو که از یک نقطه عبور میکنند:



$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$

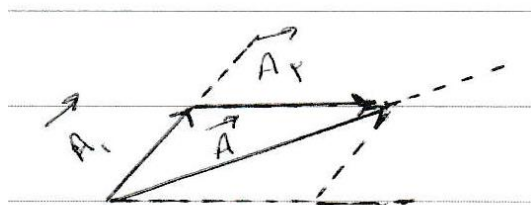


$\vec{T} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$

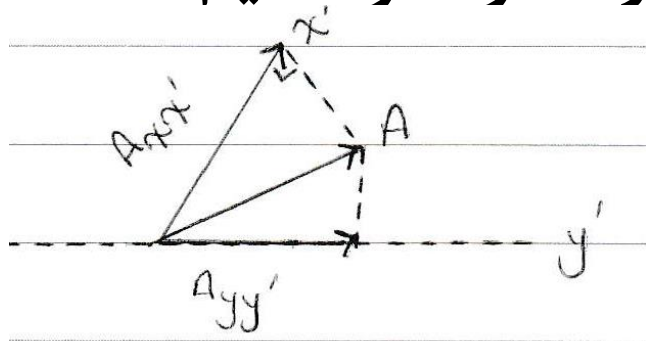
نیرو

مولفه بردار:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

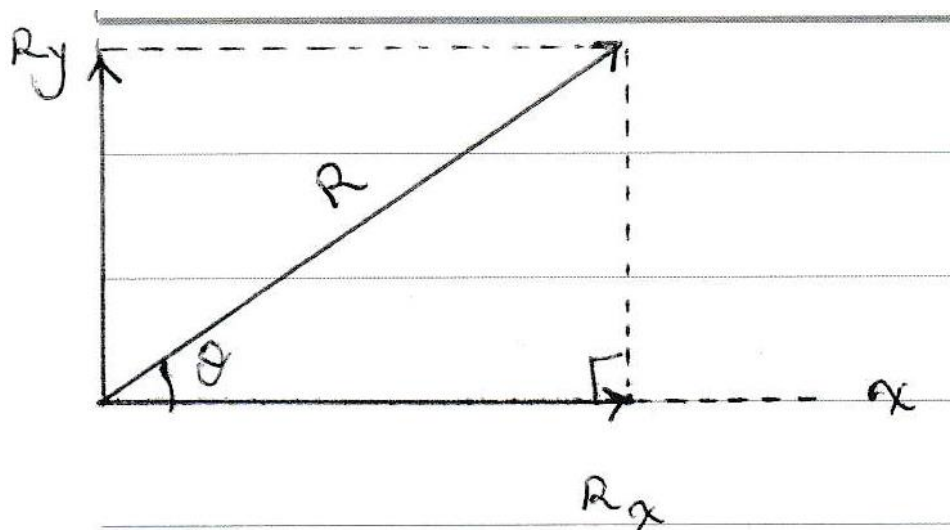


تصویر بردار: برای بدست آوردن تصویر بردار کافیست بر بردار مورد نظر عمود کنیم.



نیرو

مولفه و تصویر بردار برابرند:



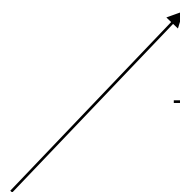
$$R = R_x + R_y$$

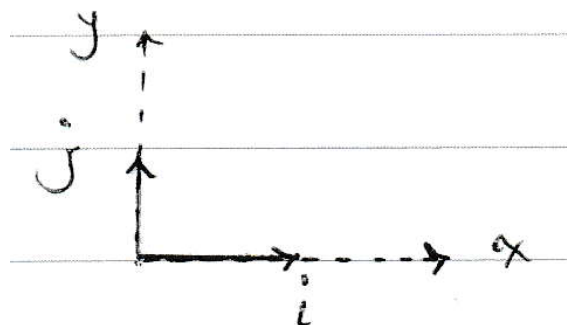
$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{|R_y|}{|R_x|}$$

نیرو

بردار یکه


$$\vec{n}_A = \vec{A} / |A|$$



نیرو

ضرب داخلی دو بردار

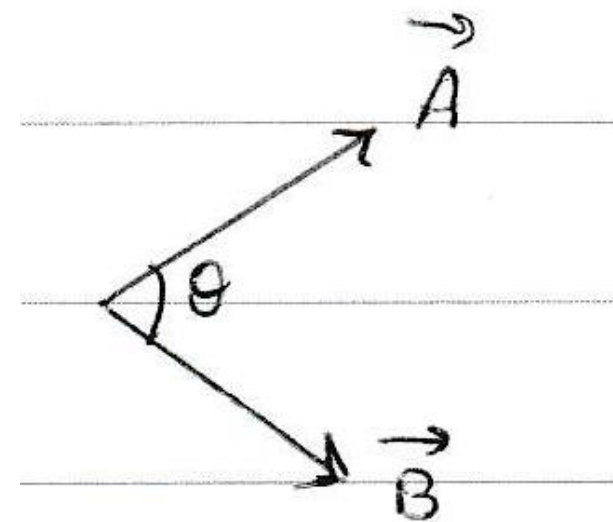
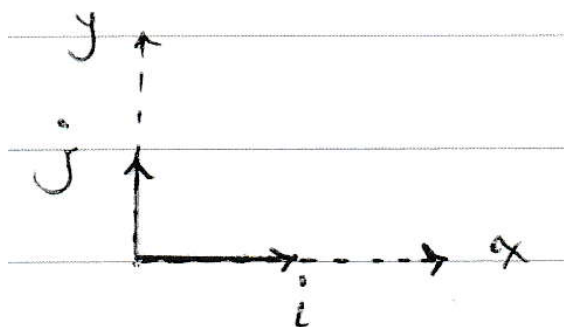
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A| |B| \cos \theta$$

$$(A_x i + A_y j) \cdot (B_x i + B_y j) = A_x B_x + A_y B_y$$

$$i \cdot i = 1$$

$$j \cdot j = 1$$

$$i \cdot j = 0$$



ڦيرو

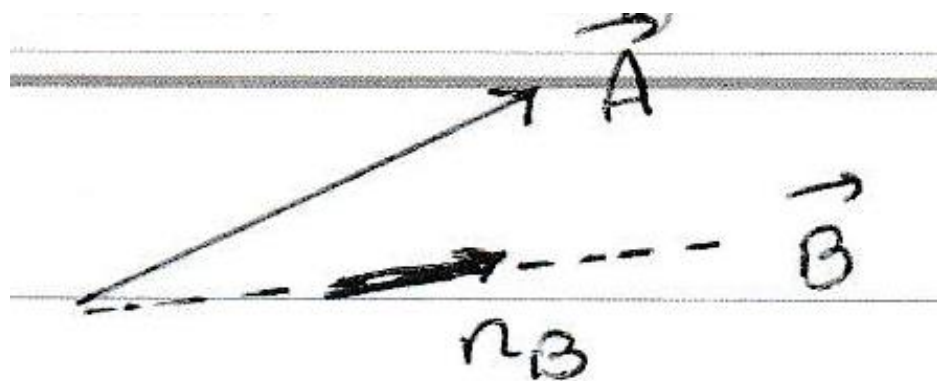
تمرين:

اثبات رابطة زير.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

نیرو

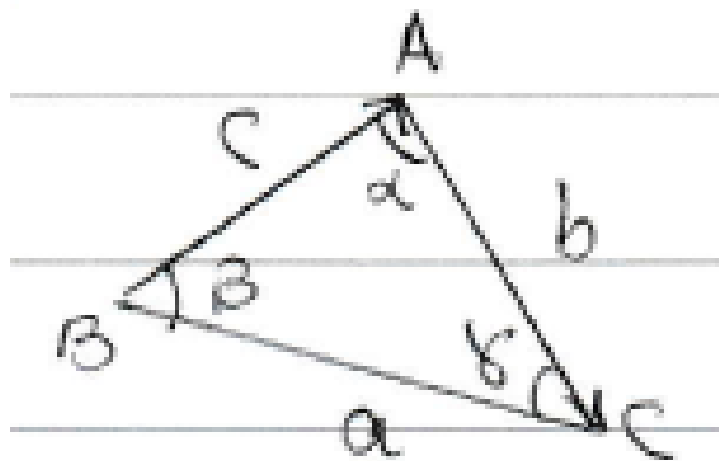
تصویر بردار A در راستای بردار B



$$\vec{A}_B = (\vec{A} \cdot \vec{n}_B) \vec{n}_B$$

$$|\vec{A}_B| = (\vec{A} \cdot \vec{n}_B)$$

نیرو



$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

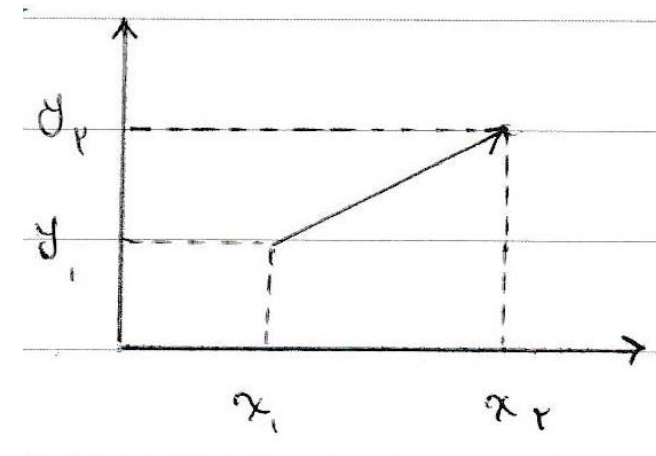
رابطه cos:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

رابطه sin:

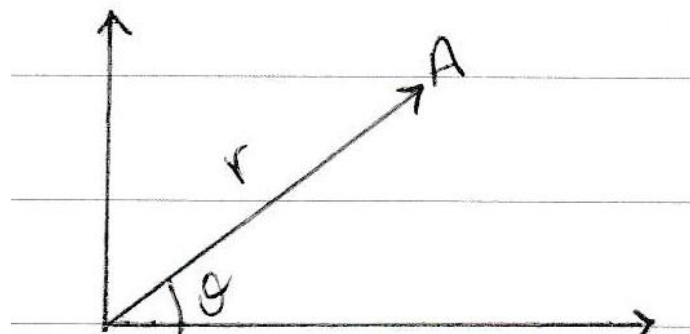
نیرو

مختصات کارتیزین



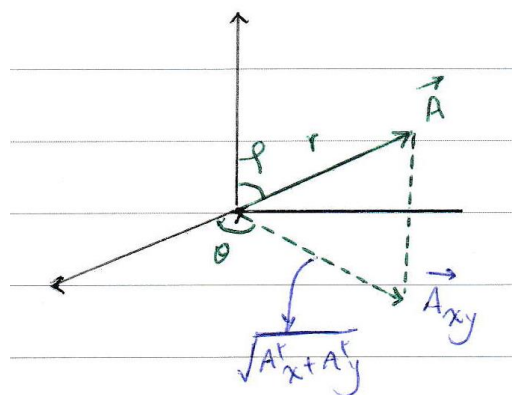
$$A = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j$$

مختصات قطبی



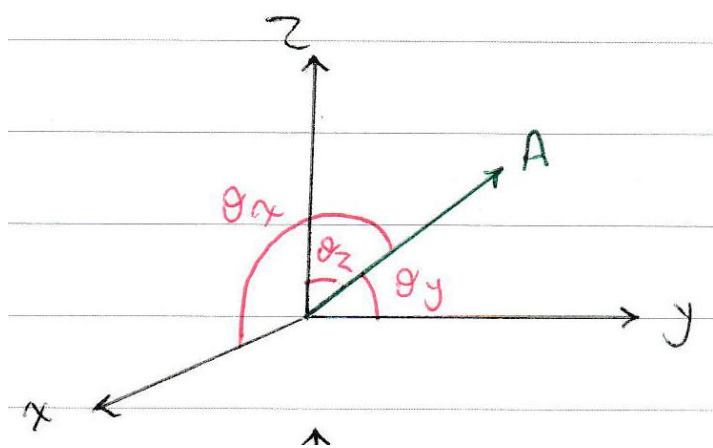
$$A = r \cos \theta i + r \sin \theta j$$

مختصات استوانه ای



$$\begin{aligned} r_x &= r \sin \varphi \cos \theta i \\ r_y &= r \sin \varphi \cos \theta j \\ r_z &= r \cos \varphi k \end{aligned}$$

نیرو



$$A = A_x i + A_y j + A_z k$$

$$A_x = |A| \cos \theta_x \quad (\cos \theta_x = l)$$

$$A_y = |A| \cos \theta_y \quad (\cos \theta_y = m)$$

$$A_z = |A| \cos \theta_z \quad (\cos \theta_z = n)$$

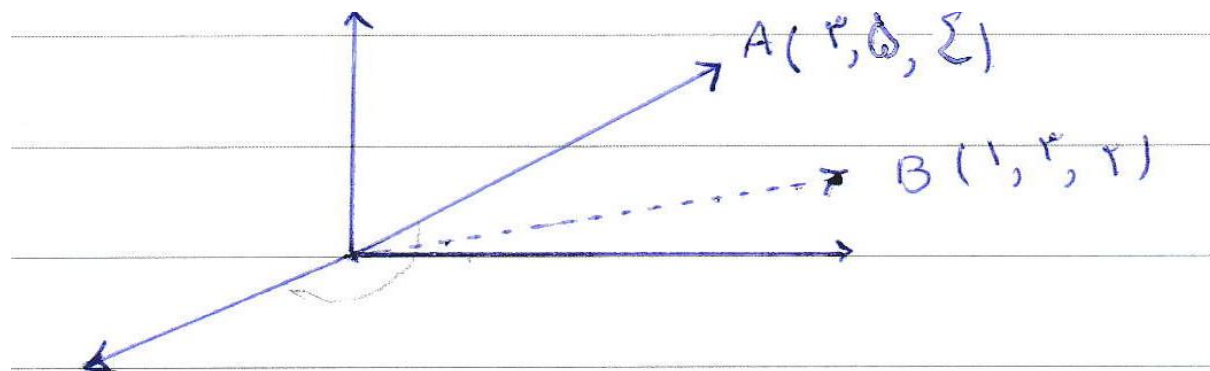
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

نیرو

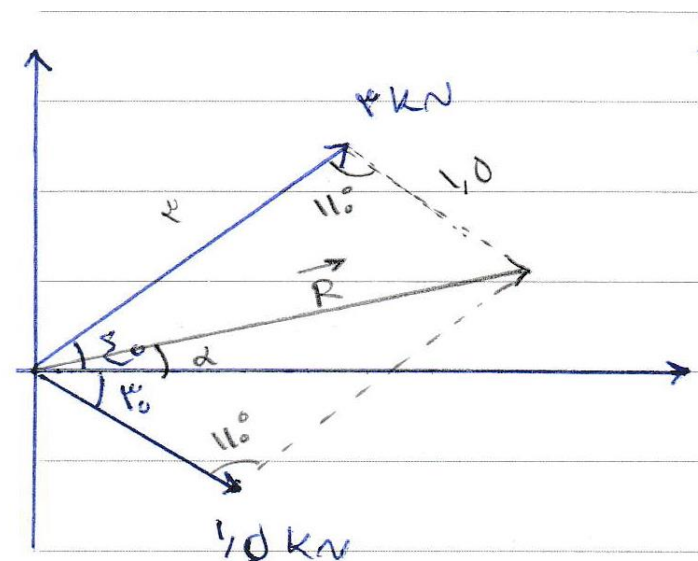
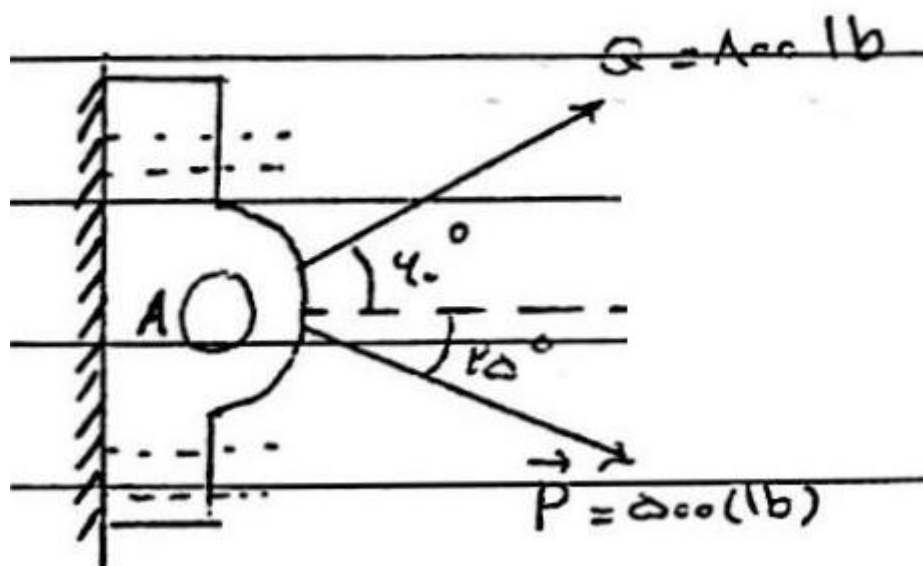
مثال:

تصویر بردار A در راستای بردار B .
Cos های هادی.
زاویه بین بردار A و b .



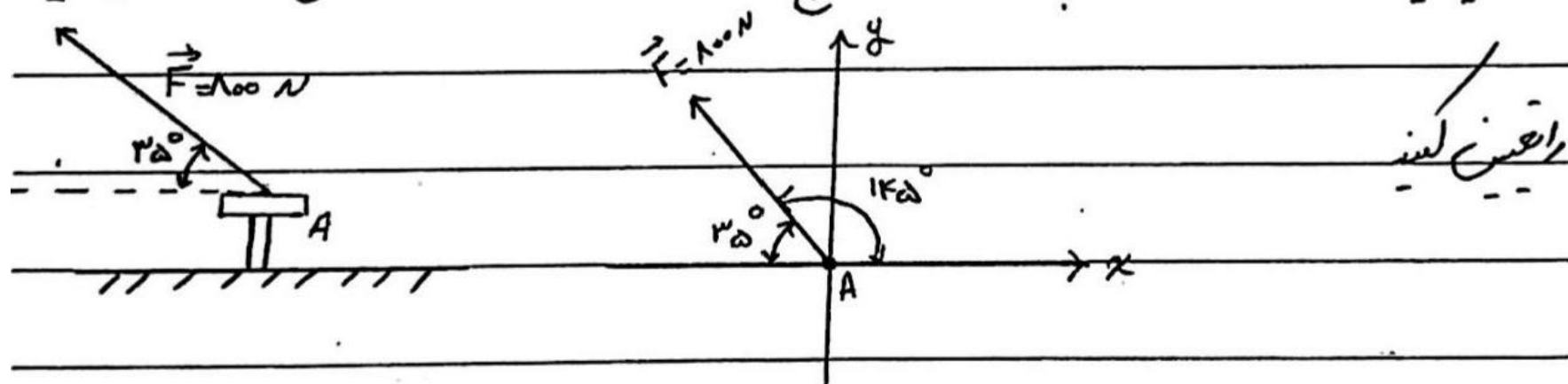
نیرو

مثال: مطلوب است محاسبه برآیند نیروها



نیرو

مثال: نیرویی برابر با 1000 N مطابق شکل بر سطح A نیروی کند مؤلفه‌های افقی و عمودی این نیرو

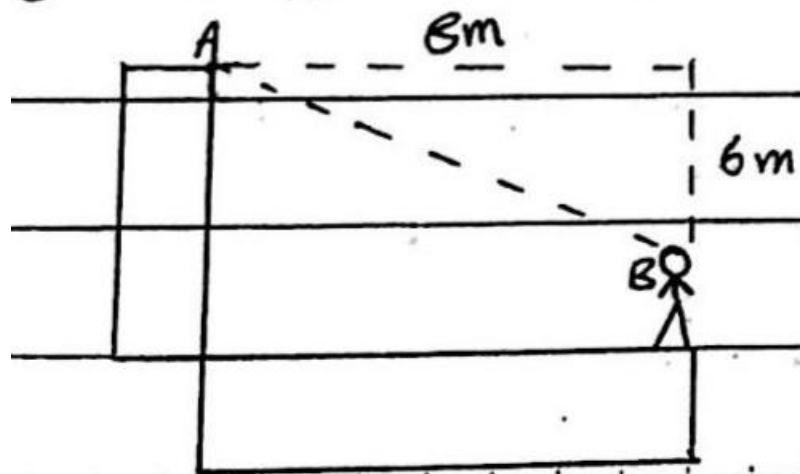


$$F_x = F \cos 35^\circ = F \cos 35^\circ = (1000\text{ N}) \cos 35^\circ = 652\text{ N}$$

$$F_y = F \sin \alpha = (1000\text{ N}) \sin 35^\circ = 359\text{ N}$$

نیرو

آهن: شخصی با نیروی 300 N طنزی را که به یک سازه فلزی بسته شده است کشی شده. مؤلفه‌های افقی و عمودی



نیروی وارد بر نقطه A را بیابید

$$F_x = 300 \text{ N} \cdot \cos \alpha$$

$$F_y = -300 \text{ N} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = 0.6$$

$$\cos \alpha = 0.8$$

$$F_x = 300 \left(\frac{4}{5} \right) = 240 \text{ N}$$

$$F_y = -300 \left(\frac{3}{5} \right) = -180 \text{ N}$$

B

گشتاور، لنگر، ممان

گشتاور \vec{M} برابر است با حاصل ضرب بردار فاصله \vec{r} در بردار نیرو \vec{F} :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

این ضرب برداری است و حاصل آن هم مقدار دارد و هم جهت یعنی بردار است.

برای تعیین جهت گشتاور از قاعده دست راست استفاده میکنیم:

چهار انگشت دست راست در جهت چرخش نیرو (حرکت جسم) خم کن

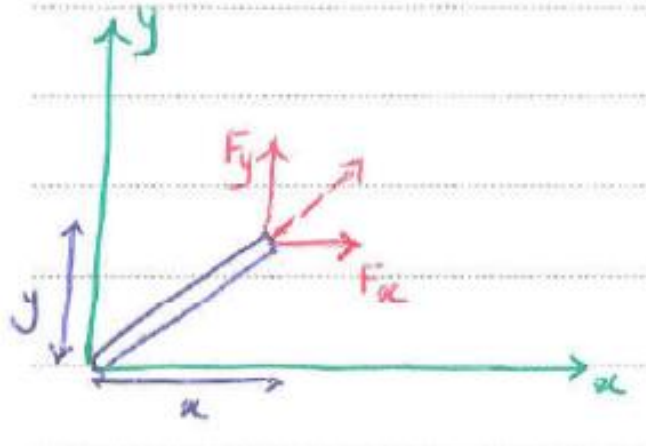
• اگر انگشت شست به سمت بیرون صفحه باشد گشتاور مثبت و

• اگر انگشت شست به سمت داخل صفحه باشد گشتاور منفی است.

گشتاور، لنگر، ممان

وقتی نیرو و بازو در صفحه X-Y باشند، جهت گشتاور نسبت به محور Z سنجیده میشود:

نوع چرخش جسم حول نقطه	جهت محور Z	علامت گشتاور
چرخش پادساعتگرد	به سمت بیرون صفحه	مثبت
چرخش ساعتگرد	به سمت داخل صفحه	منفی



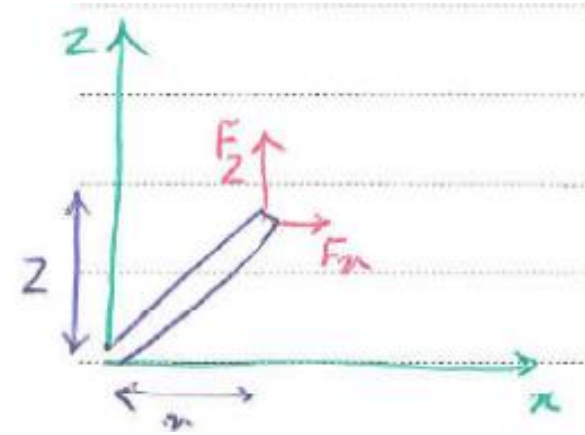
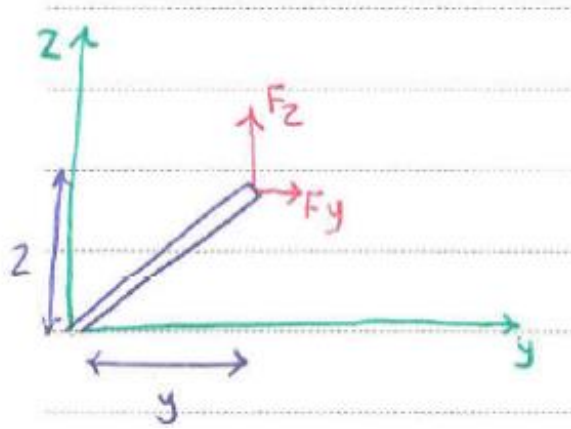
مقدار چرخش حاصل از $y F_x = F_x$

مقدار چرخش حاصل از $x F_y = F_y$

$$\vec{M}_z = (x \vec{F}_y - y \vec{F}_x) \vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$$

گشتاور، لنگر، ممان



گشتاور، لنگر، ممان

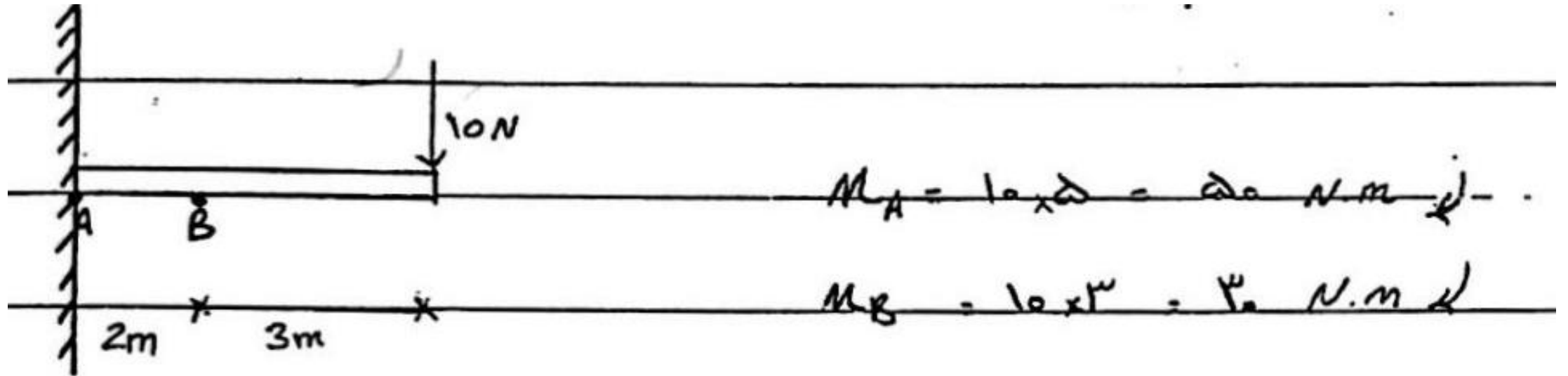
گشتاور در سه بعد:

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

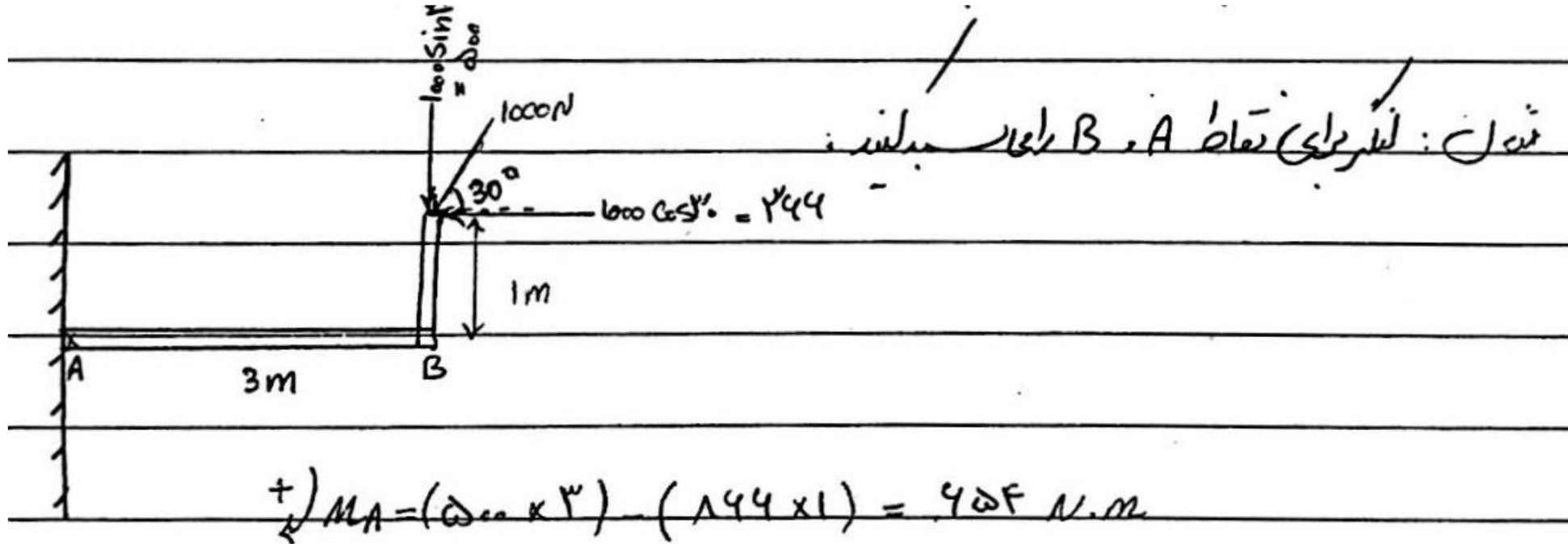
$$\vec{M} = \left\{ \begin{array}{l} y F_z - z F_y \\ z F_x - x F_z \\ x F_y - y F_x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{array}$$

نکته: هرگاه نیرو یا امتداد نیرو از نقطه ای عبور کند گشتاور در آن نقطه صفر می‌باشد.

گشتاور، لنگر، ممان



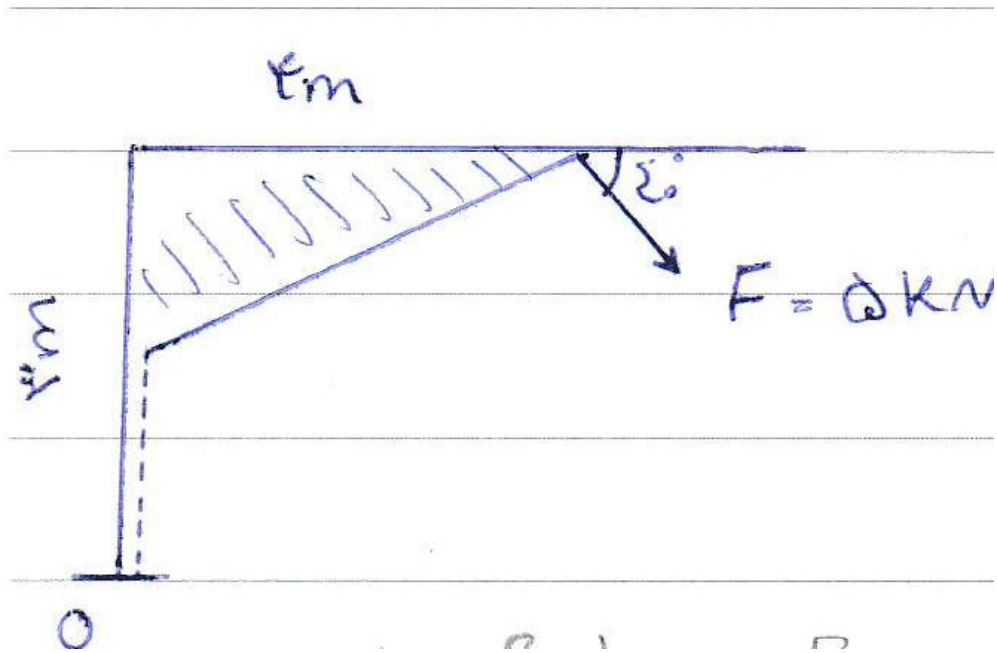
گشتاور، لنگر، ممان



$+) M_B = 0 - 866(1) = -866 \text{ N.m}$

گشتاور، لنگر، ممان

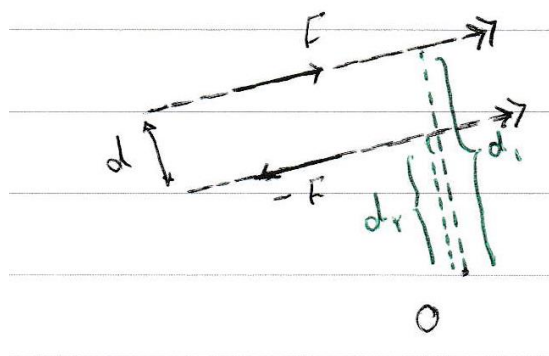
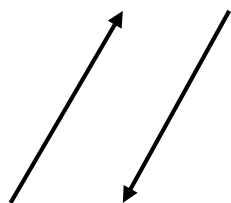
محاسبه گشتاور حول نقطه 0:
حل به دو روش



کوچل

تعریف:

دو نیرو با مقدار مساوی، موازی و مختلف الجہت



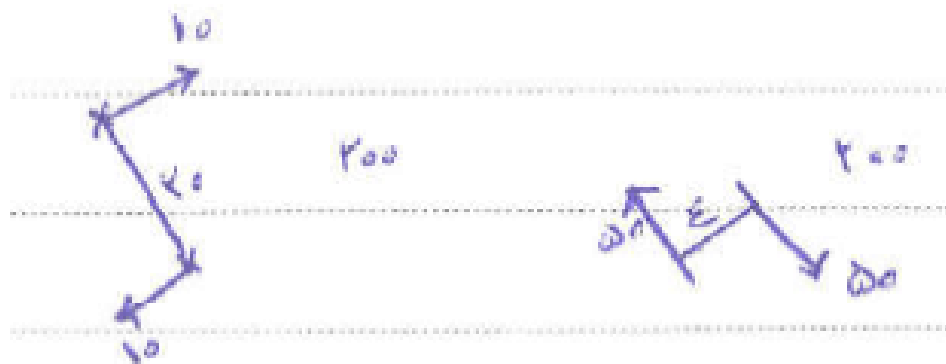
برآیند نیروها = صفر

برآیند گشتاورها: $Fd_1 - Fd_2 = Fd$

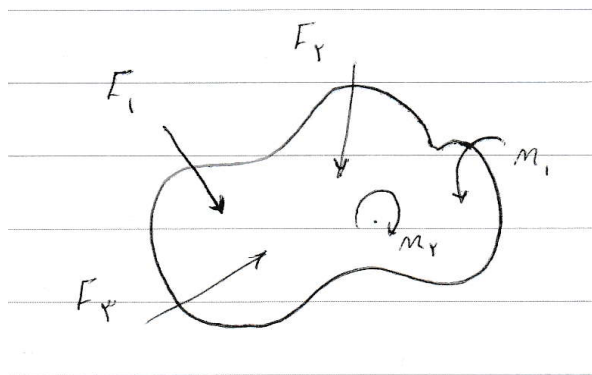
کوپل معادل

برای هر مقدار گشتاور بی شمار کوپل وجود دارد.

$$M = 200$$



تعدادل



مفهوم مهندسی تعدادل آن است که ذره و یا جسم، جابجایی نداشته باشد و منظور از جابجایی تغییر مکان از یک نقطه به نقطه دیگر میباشد.

تعدادل جسم صلب:

در دو بعد:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}$$

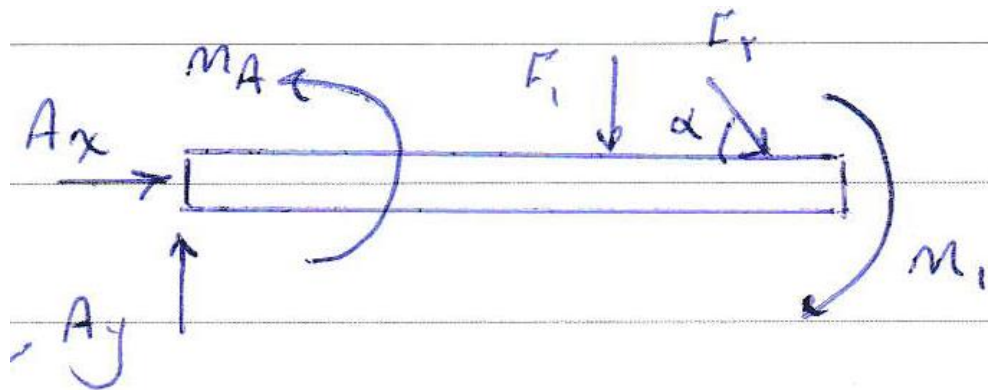
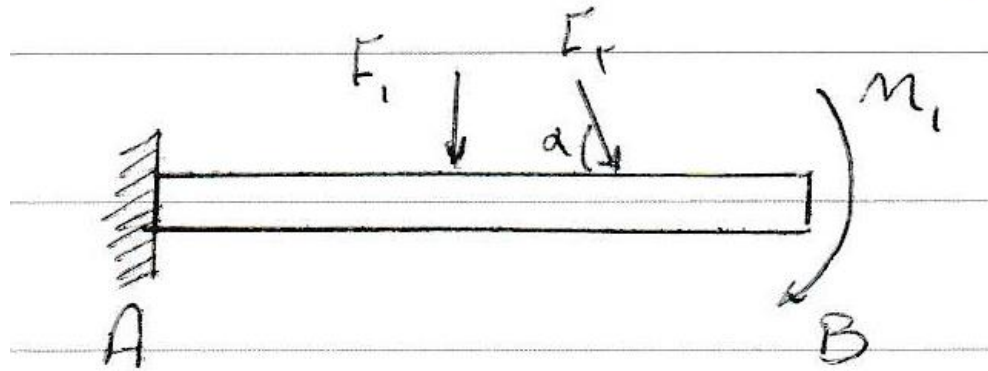
در سه بعد:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_x &= 0 \\ \sum M_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0\end{aligned}$$

دیاگرام آزاد

جسم و تمام نیروهای وارد بر آن



- وزن

- نیروهای خارجی (داده های مسئله)

- نیروهای تکیه گاهی

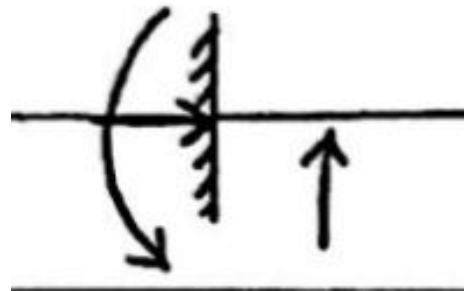
انواع تکیه گاه و نیروهای تکیه گاهی



تکیه گاه یک مجهولی (غلطکی)



تکیه گاه دو مجهولی (مفصلی)

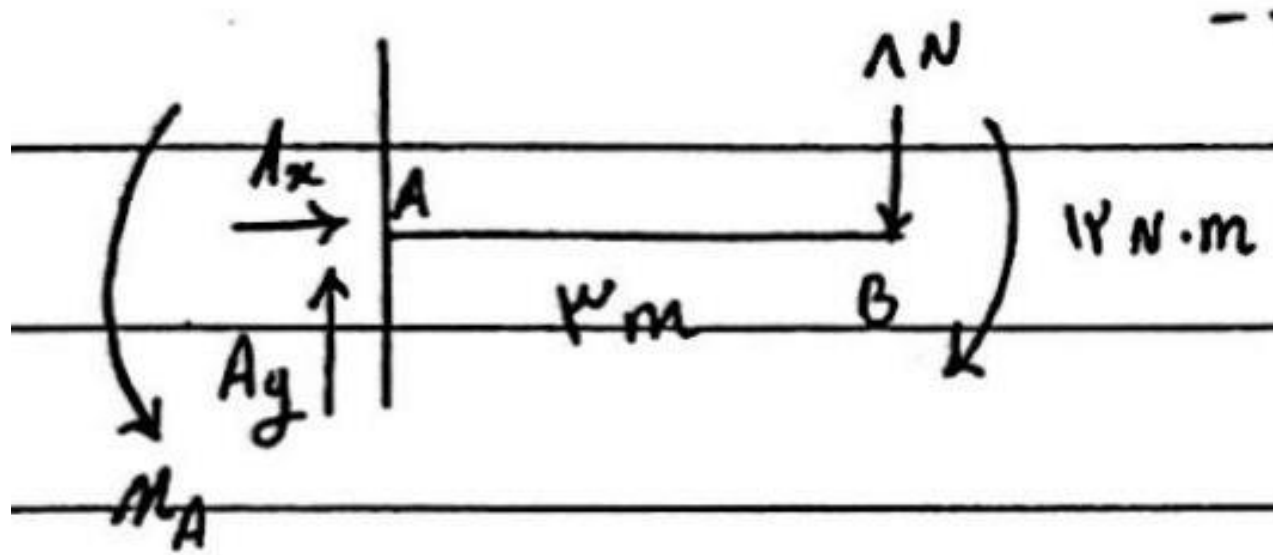


تکیه گاه سه مجهولی (گیردار)

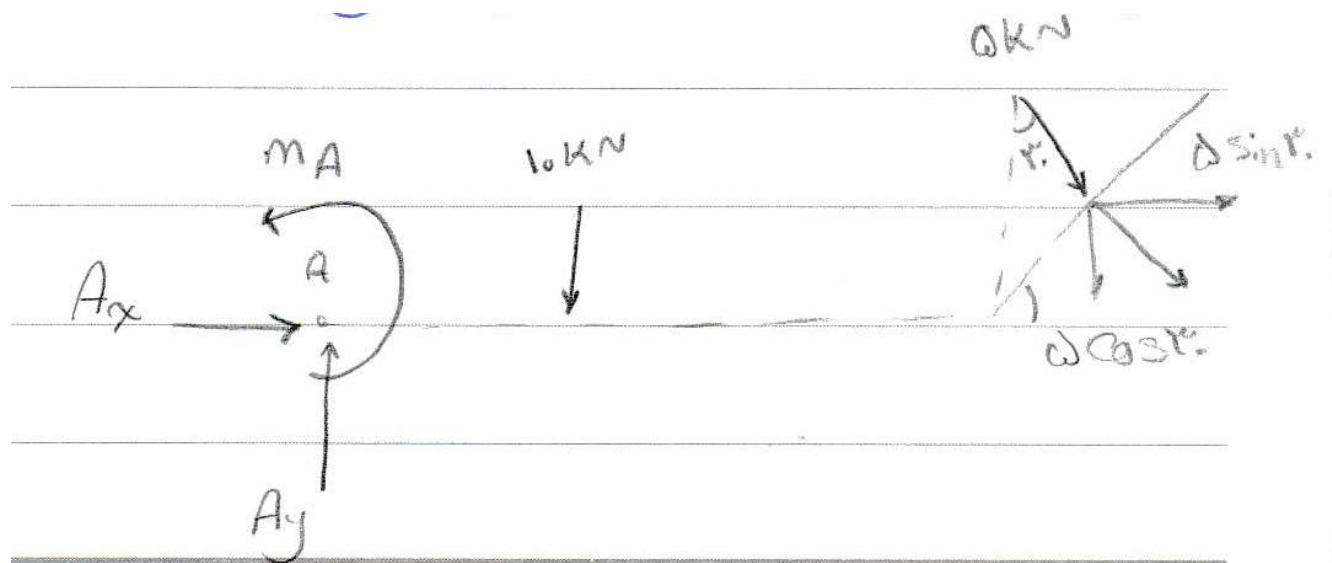
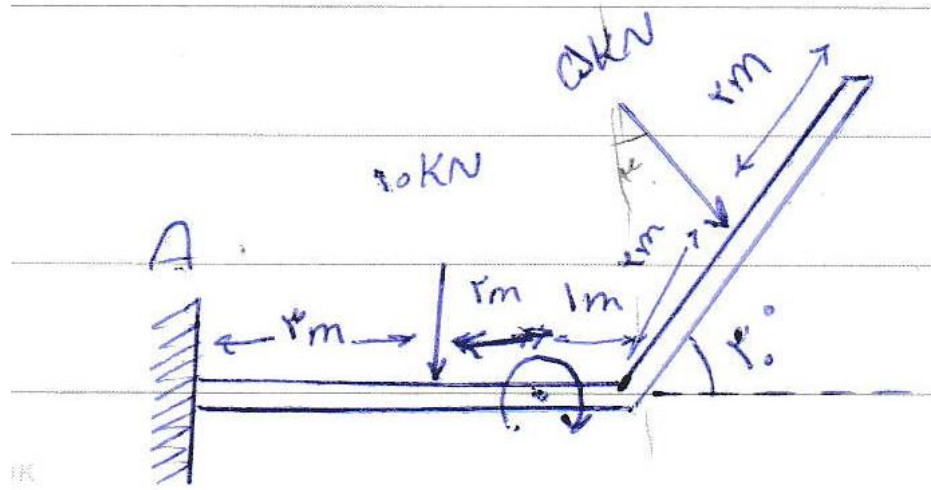
حل مسائل استاتیک

- تعیین سیستم مختصات
- رسم دیاگرام آزاد جسم
- نوشتن معادلات تعادل
- حل معادلات تعادل

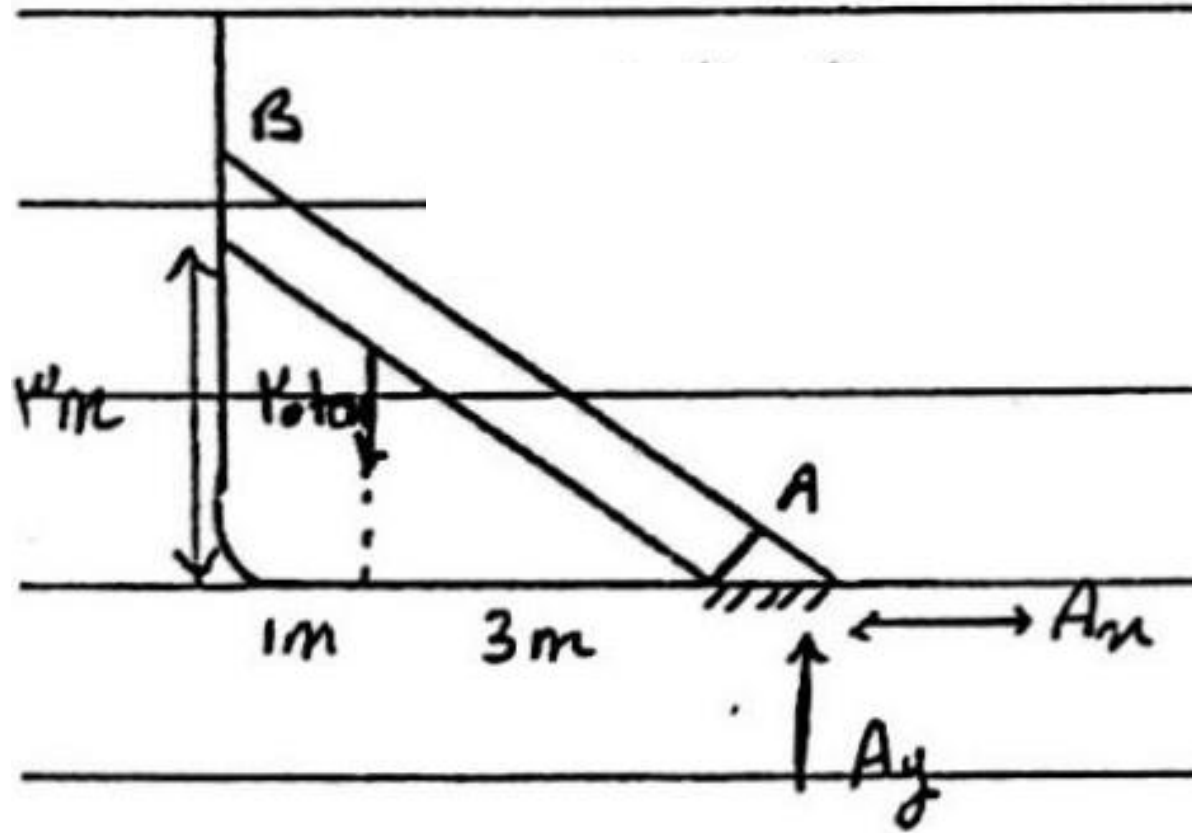
مطلوبست محاسبه نیروهای تکیه گاهی در دیاگرام آزاد زیر.



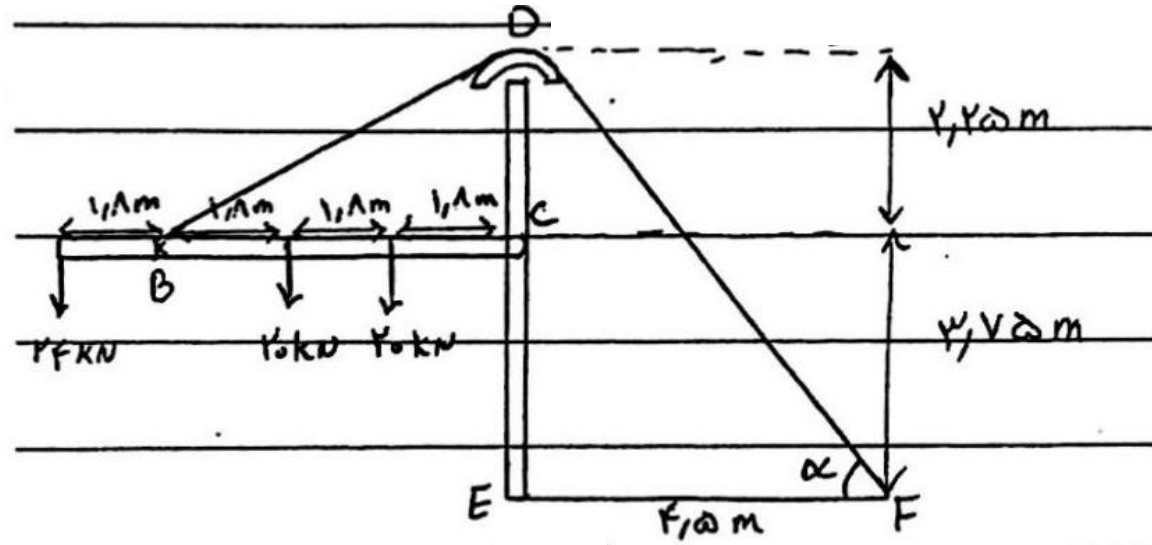
نیروهای تکیه گاهی را در تیر شکل زیر بدست آورید.
 $M=2 \text{ KN.m}$



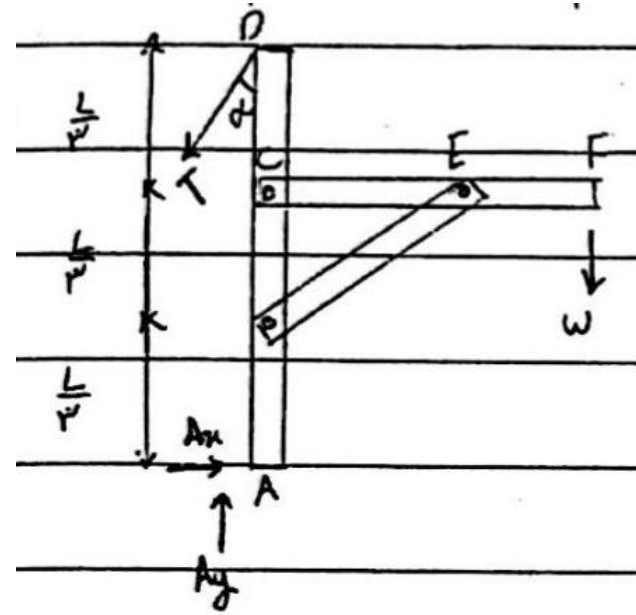
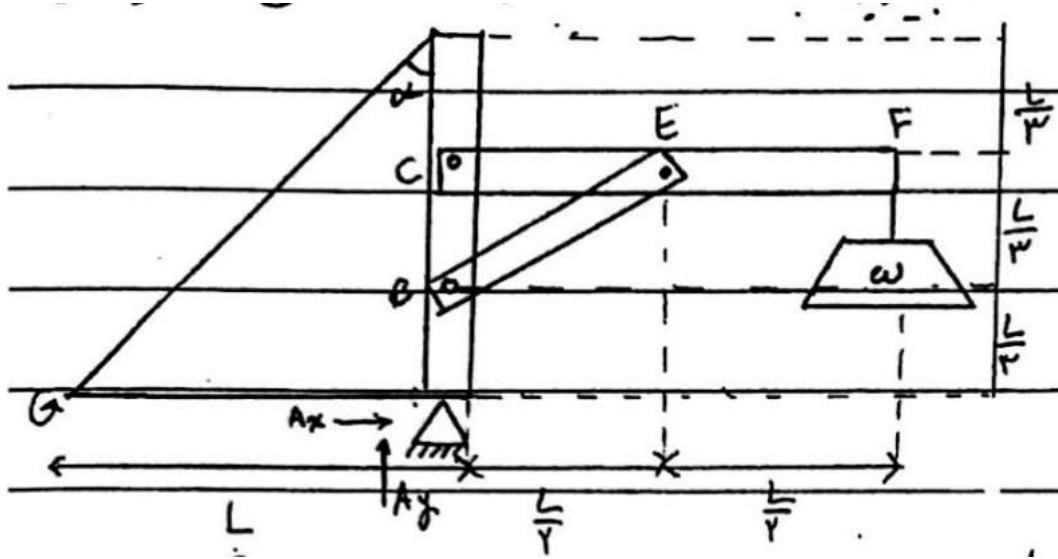
مطلوبست محاسبه عكس العمل تكيه گاه A .



قاب نشان داده شده قسمتی از سقف یک ساختمان را نگه میدارد. کشش در کابل 150 KN است. عکس العمل در انتهای ثابت E را محاسبه کنید.



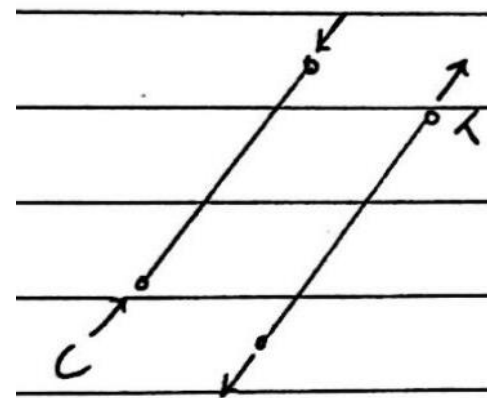
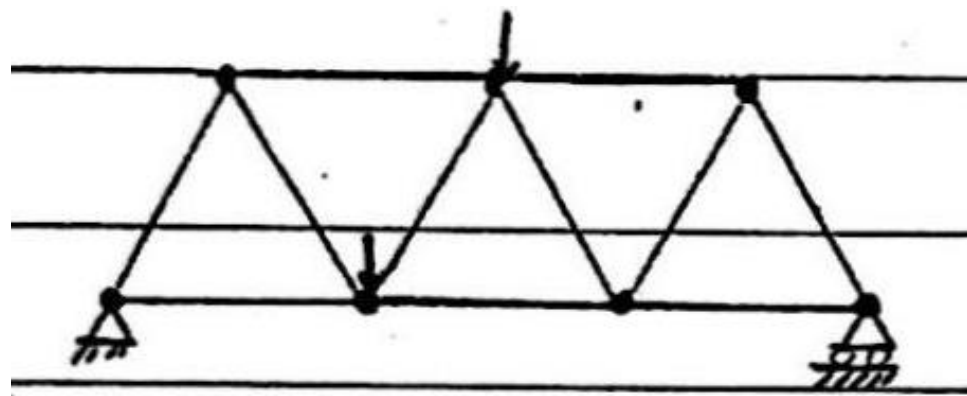
با توجه به جرثقیل نشان داده شده در شکل زیر که باری به وزن W را نگه داشته است، نیروهای تکیه گاهی A را محاسبه کنید.



خرپا

سازه ای متشکل از تعدادی عضو صلب که توسط مفصلهای بدون اصطکاک به همدیگر متصل هستند و نیروهای وارد بر آن فقط نیروهای متمرکز هستند که در مفصل ها اثر میکنند. از وزن اعضا صرف نظر میشود.

اعضای خرپا همگی اعضای دو نیرویی هستند و همگی تحت فشار یا کشش محوری هستند و خمیده نمیشوند.



تحلیل خرپا

تحلیل خرپا به دو روش گره یا مفصل و روش مقطع انجام میشود.
روش گره: رسم دیاگرام آزاد مفاصل خرپا به صورت جداگانه و نوشتن معادلات تعادل و محاسبه مجهولات

معادلات تعادل گره ها:

- $\sum F_x = 0$

- $\sum F_y = 0$

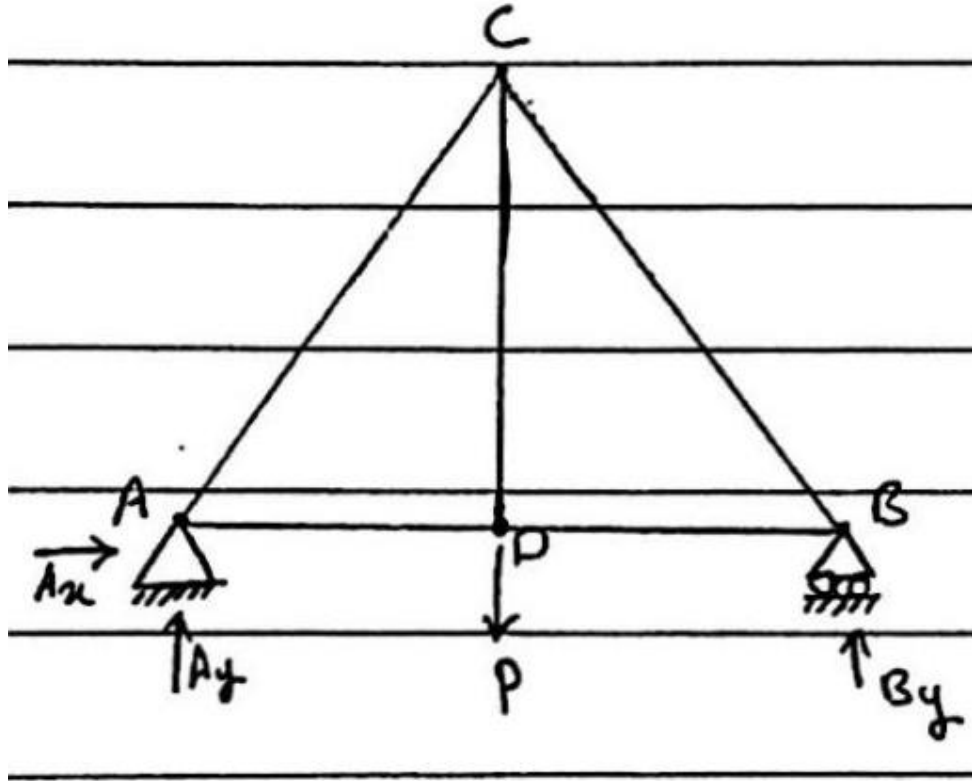
- $\sum F_x = 0$

- $\sum F_y = 0$

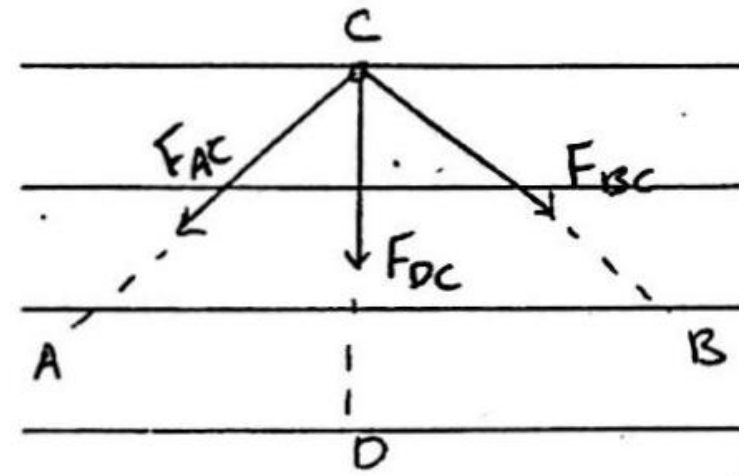
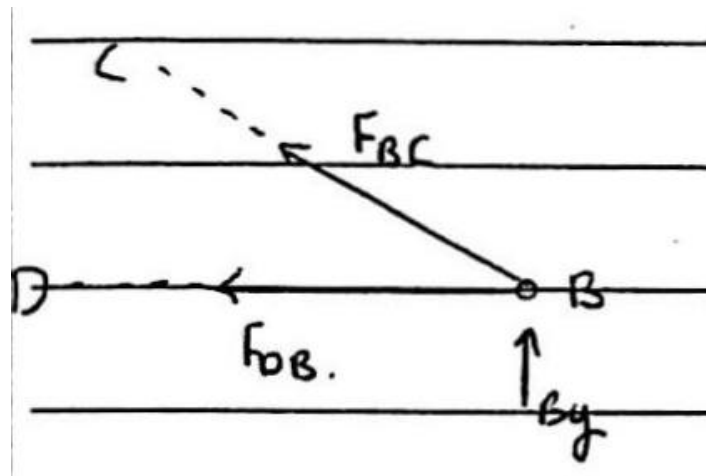
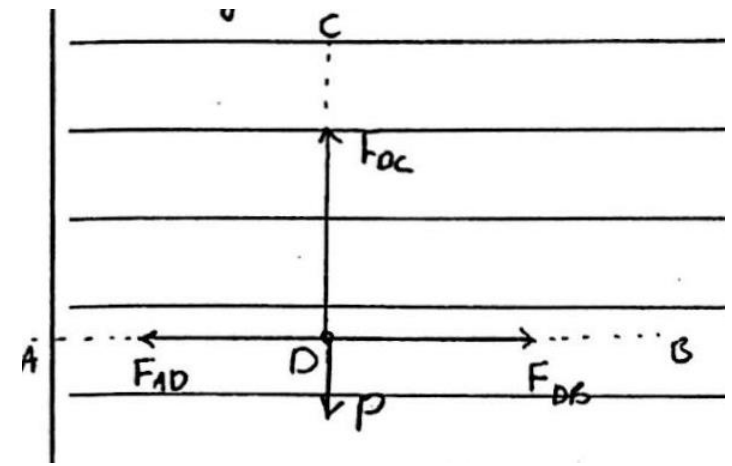
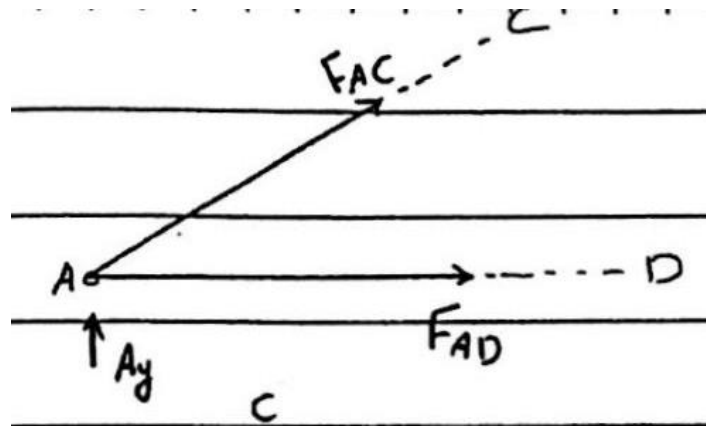
- $\sum M = 0$

معادلات تعادل در دیاگرام آزاد کل خرپا:

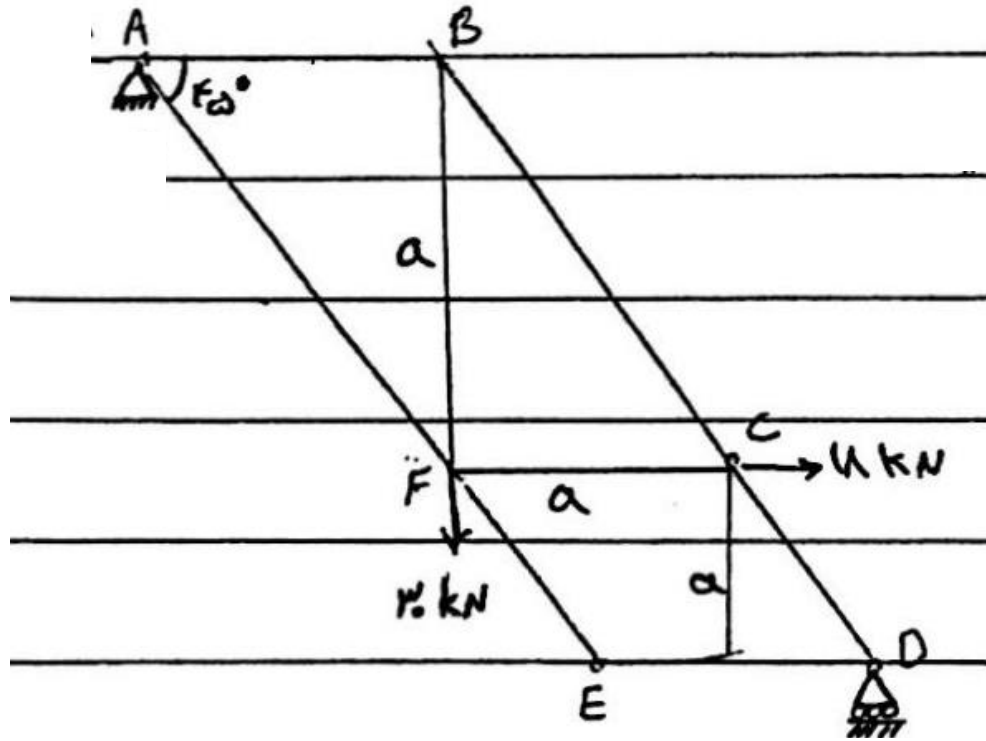
بررسی پارامتری با روش گره یا مفصل



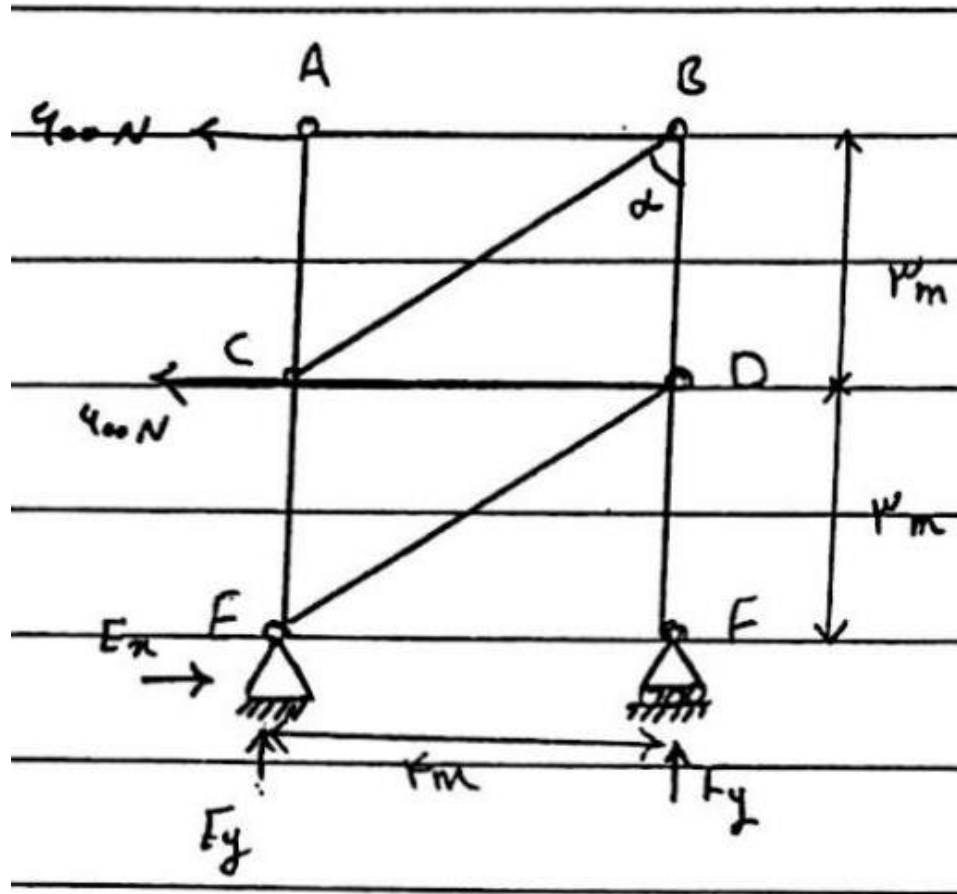
$$\sum M_A = 0 \quad \text{بیشترین گره}$$
$$\sum F_y = 0 \quad \text{بیشترین گره}$$
$$\sum F_x = 0 \quad \text{بیشترین گره}$$



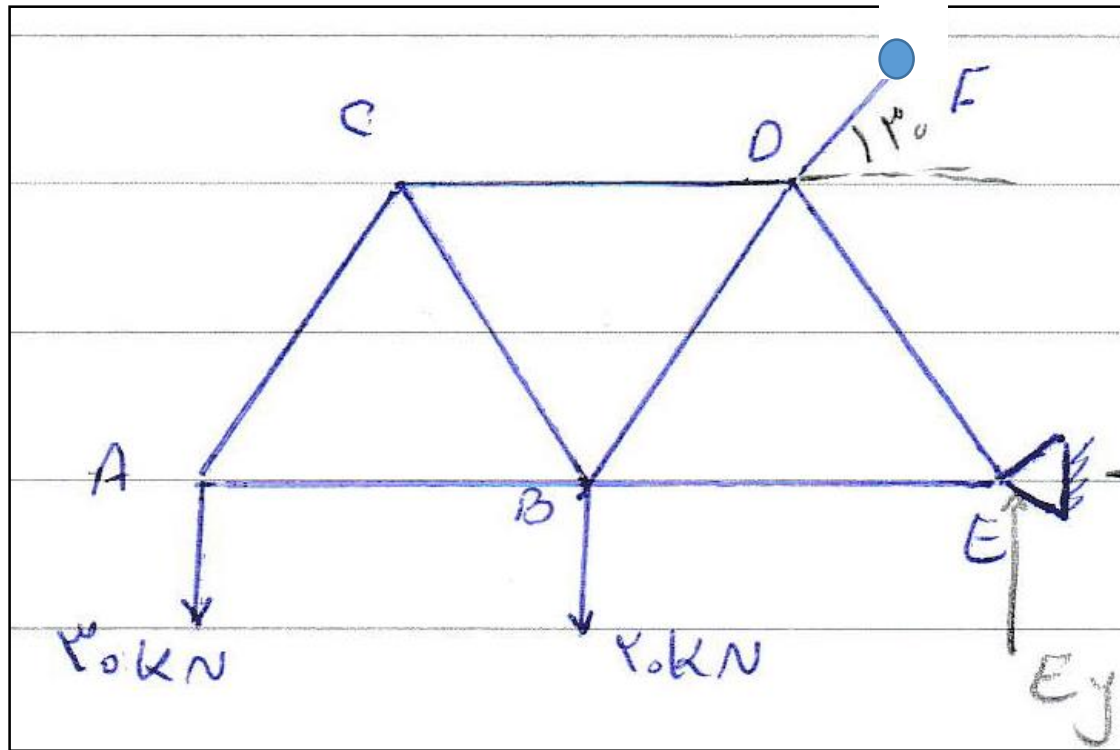
در خریای نشان داده شده نیروهای داخلی اعضا را تعیین کنید.



تمرین: مدر خریای نشان داده شده نیروهای داخلی اعضا را تعیین کنید.



در خریای نشان داده شده نیروهای داخلی اعضا را تعیین کنید.

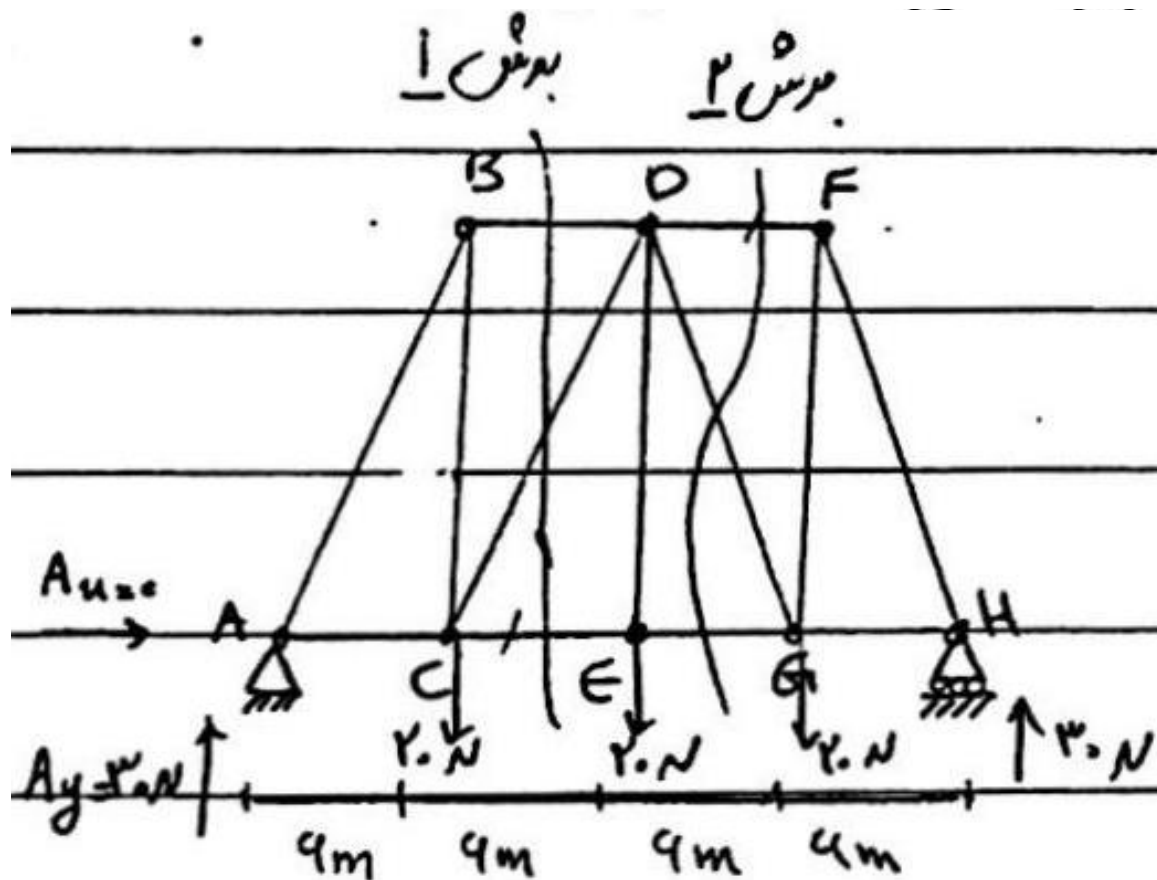


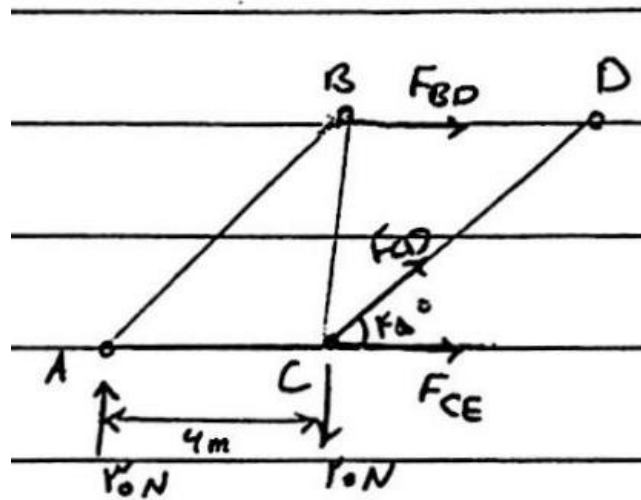
تحلیل خرپا

روش مقطع: با یک برش فرضی کل خرپا را به دو بخش مجزا از هم تقسیم میکنیم.
با رسم دیاگرام آزاد یکی از بخش ها و اعمال معادلات مستقل تعادل نیروهای داخلی اعضایی که توسط برش فرضی بریده شده اند را محاسبه میکنیم.

از آنجایی که در دیاگرام آزاد مذکور در حالت کلی حداقل سه معادله مستقل تعادل میتوان نوشت، در ایجاد برش باید دقت کرد که برش فرضی جایی زده شود که حداکثر سه عضو مجهول را قطع نماید.

در خریای نشان داده شده نیروهای داخلی اعضای CE, DF, DE را بدست آورید.



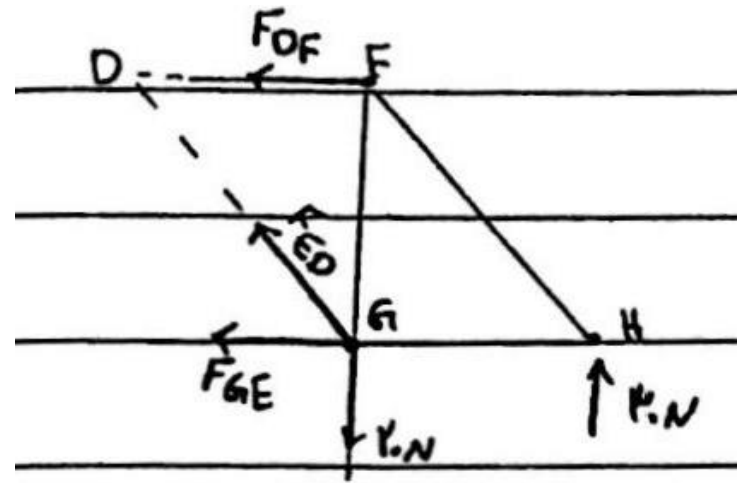


$$\overset{\oplus}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{CE} + F_{CD} \cos \alpha + F_{BD} = 0$$

$$\overset{\oplus}{\uparrow} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 10 - 10 + F_{CD} \sin \alpha = 0 \Rightarrow F_{CD} = \frac{10}{\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

$$= \frac{10}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 10\sqrt{5}$$

$$\overset{\oplus}{\curvearrowright} \Sigma M_C = 0 \Rightarrow 10 \times 4 + F_{BD} \times 4 = 0 \Rightarrow F_{BD} = \frac{10}{5} = 2$$



$$\overset{\oplus}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{GE} - F_{GD} \cos \alpha - F_{DF} = 0$$

$$\overset{\oplus}{\uparrow} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -10 + 10 + F_{GD} \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow F_{GD} = -10\sqrt{5}$$

$$\overset{\oplus}{\curvearrowright} \Sigma M_G = 0$$

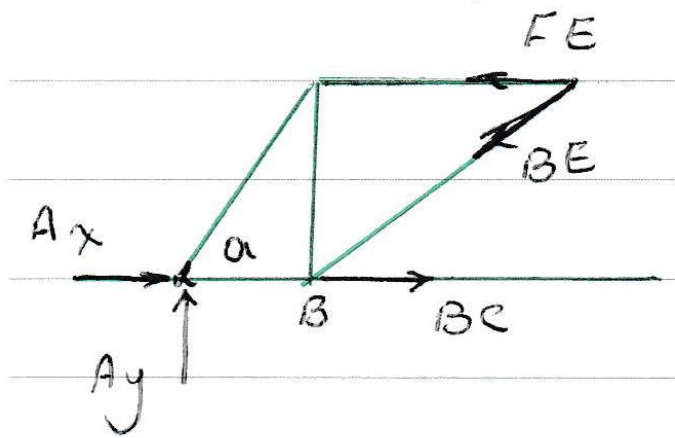
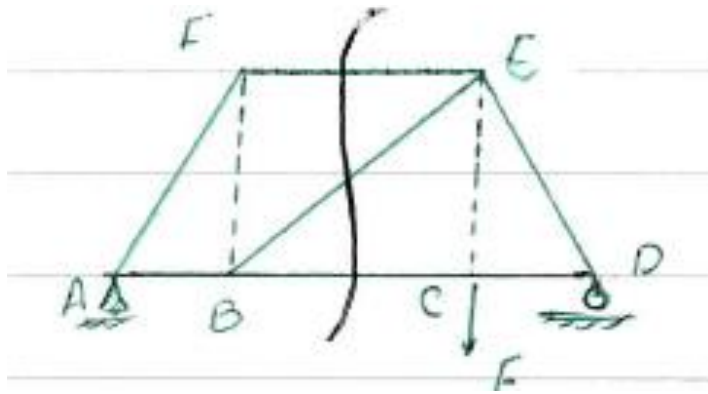
$$\Rightarrow -10 \times 4 - F_{DF} \times 4 = 0$$

$$F_{DF} = -10 \text{ N (tension)}$$

١- شروط تعادل

٢- مقطع ١

٣- مقطع ٢



مرکز ثقل

مرکز ثقل نقطه ای است که اثر کل وزن جسم را میتوان در آن متمرکز در نظر گرفت. به عبارت دیگر، اگر جسم در آن نقطه آویزان شود یا نگخ داشته شود، در حالت تعادل میماند و نمی افتد.

تفاوت مرکز ثقل و مرکز جرم:

اگر شتاب گرانش در تمام نقاط جسم یکسان باشد که معمولاً اینطور است، مرکز ثقل و مرکز جرم در یک نقطه اند.

اگر جسم خیلی بزرگ باشد (ماهواره یا برج بلند) و شتاب گرانش در قسمت های مختلف فرق کند، مرکز ثقل و مرکز جرم متفاوتند.

مرکز ثقل

برای محاسبه مرکز ثقل در استاتیک، فرض میکنیم جسم از بخش های کوچک تشکیل شده است که هر بخش وزن خودش را دارد.

اگر جسم دو بعدی یا سه بعدی باشد مختصات مرکز ثقل از روابط زیر بدست می آید:

$$x_G = \frac{\int x dW}{\int dW}$$

$$y_G = \frac{\int y dW}{\int dW}$$

$$z_G = \frac{\int z dW}{\int dW}$$

که در آن dW وزن جز کوچکی از جسم است. $dW = \gamma dV$ و γ وزن مخصوص ماده است.

مرکز ثقل

حالت ساده تر:

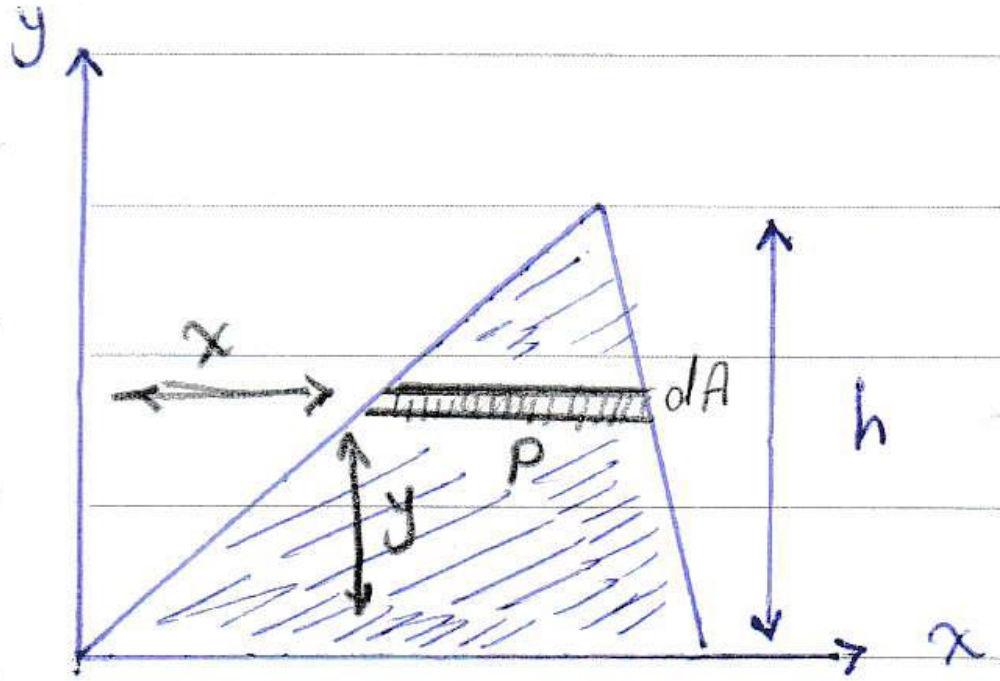
جسم یکنواخت و هم جنس باشد. در این حالت وزن در همه جا یکسان است :

$$x_G = \frac{\int x dA}{\int dA}$$

$$y_G = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

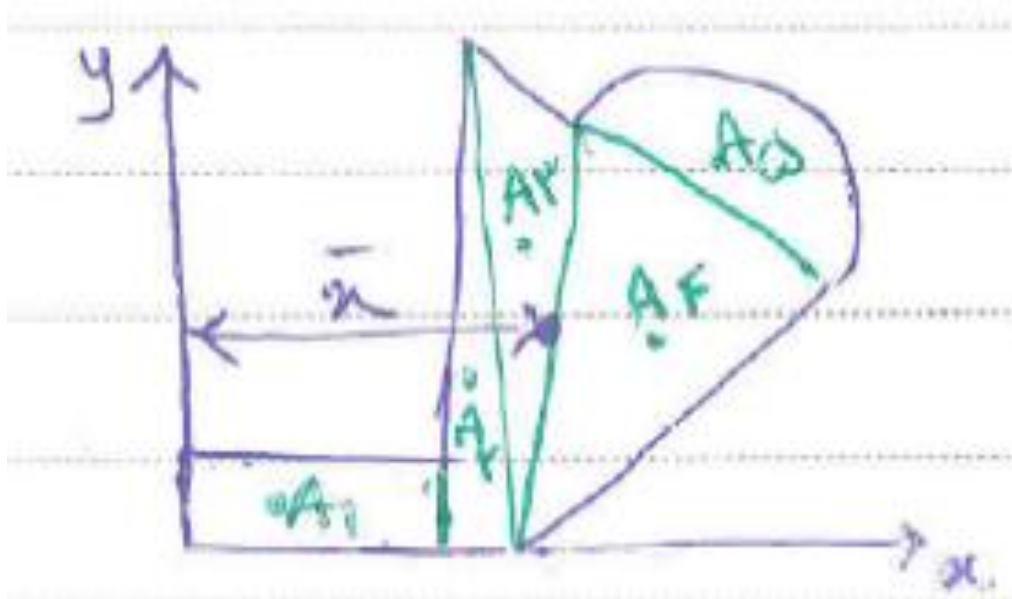
این روابط در واقع مرکز سطح یا مرکز هندسی را محاسبه میکنند.

مرکز ثقل



مرکز ثقل

مرکز سطح اجسام پیچیده را با تقسیم به اجسام ساده تر محاسبه میشود.



$$\sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

$$x_G = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$x_G = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_5 A_5}{A_1 + A_2 + \dots + A_5}$$

مرکز ثقل

- مستطیل با طول b و ارتفاع h

$$x_G = b/2 \quad y_G = h/2$$

- مثلث قائم الزاویه با قاعده b و ارتفاع h

$$x_G = b/3 \quad y_G = h/3$$

- نیم دایره با شعاع r

مرکز ثقل روی محور تقارن و در فاصله $y_G = 4r/3\pi$ از قطر قرار دارد.

اگر در سازه ای وزن مورد بررسی قرار بگیرد، جهت محاسبه گشتاور باید نیروی وزن را در آن نقطه در نظر گرفت.

مقاومت مصالح

ممان اینرسی

ممان اینرسی، مقاومتی است که اجسام در هنگام شروع به حرکت دایره ای یا توقف از حرکت دایره ای از خود به نمایش می گذارند. اجسام، همواره تمایل دارند وضعیت فعلی خود را حفظ کنند و هنگام تغییر وضعیت (از حالت سکون به حرکت یا حرکت به سکون)، مقاومت مشخصی را از خود به نمایش می گذارند. این مقاومت که به جرم جسم بستگی دارد، با عنوان اینرسی شناخته می شود.

$$I = \sum m_i r_i^2$$

فرم انتگرالی:

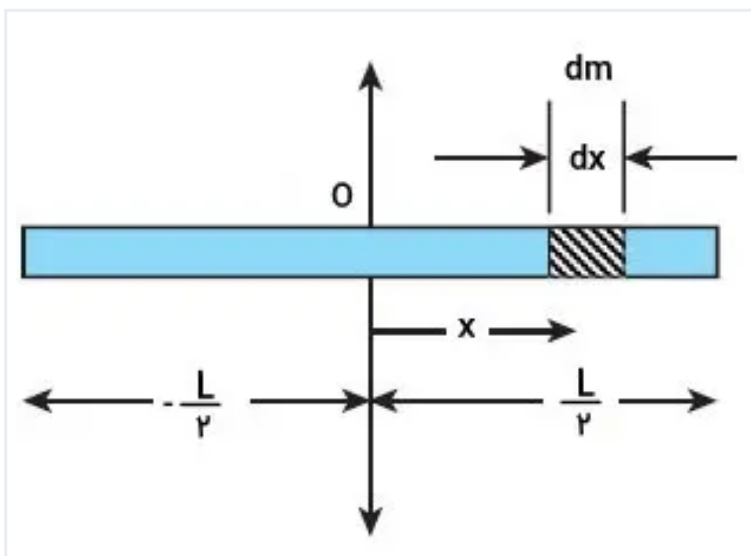
$$I = \int dl = \int r^2 dm$$

- I : ممان اینرسی
- m_i : جرم ذره i ام
- r_i : فاصله ذره i ام از محور دوران

ممان اینرسی

ممان اینرسی برخی اشکال هندسی

میله استوانه ای شکل حول محور گذرنده از مرکز جرم:



$$I = \int dI = \int x^2 dm$$

به دلیل توزیع یکنواخت جرم در میله، جرم بر واحد طول (λ) برابر است با:

$$\lambda = \frac{M}{l}$$

اگر جرم جزئی میله (dm) را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\lambda = \frac{dm}{dx}$$

$$dm = \lambda dx$$

$$I = \frac{1}{12} m L^2$$

جرم بر واحد طول را در رابطه بالا قرار می‌دهیم:

$$dm = \frac{M}{l} dx$$

$$I = \int_{-\frac{l}{4}}^{\frac{l}{4}} x^2 \left(\frac{M}{L} dx \right)$$

$\frac{M}{L}$ ، معلوم است. بنابراین، این کسر از انتگرال خارج و به پشت آن منتقل می‌شود:

$$I = \frac{M}{L} \int_{-\frac{l}{4}}^{\frac{l}{4}} x^2 dx$$

$$I = \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{4}}^{+\frac{l}{4}}$$

$$I = \frac{M}{L} \left[\frac{L^3}{24} - \left(-\frac{L^3}{24} \right) \right]$$

$$I = \frac{M}{L} \left[\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{24} \right]$$

$$I = \frac{M}{L} \left[\frac{2L^3}{24} \right]$$

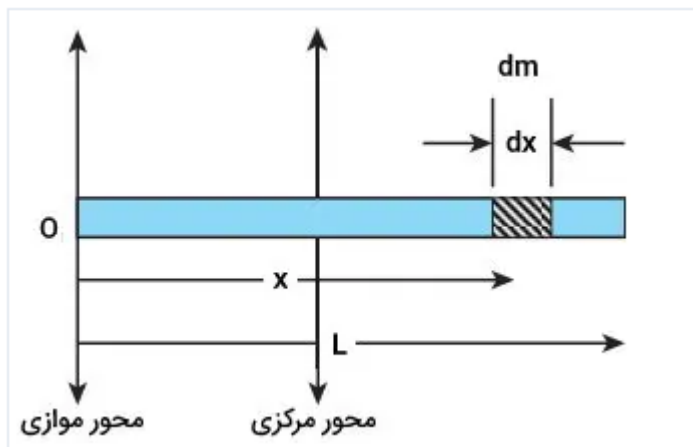
$$I = \frac{M}{L} \left[\frac{L^3}{12} \right]$$

$$I = M \left[\frac{L^2}{12} \right]$$

$$I = \frac{1}{12} mL^2$$

ممان اینرسی

ممان اینرسی میله استوانه ای شکل حول محور گذرنده از انتهای میله:



$$I = I_c + Mh^2$$

- I : ممان اینرسی جسم حول محور موازی
- I_c : ممان اینرسی جسم حول محور گذرنده از مرکز جرم
- M : جرم جسم
- h : فاصله بین محور گذرنده از مرکز جرم و محور موازی با آن

$$I = \frac{1}{3} m L^2$$

فاصله بین محور گذرنده از مرکز جرم و محور موازی با آن، برابر است با:

$$h = \frac{L}{2}$$

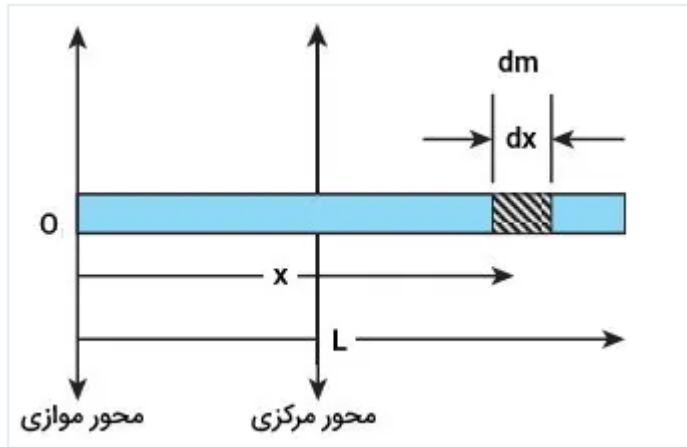
این روابط را درون قضیه محوره‌های موازی قرار می‌دهیم:

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2$$

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{3}{12}mL^2$$

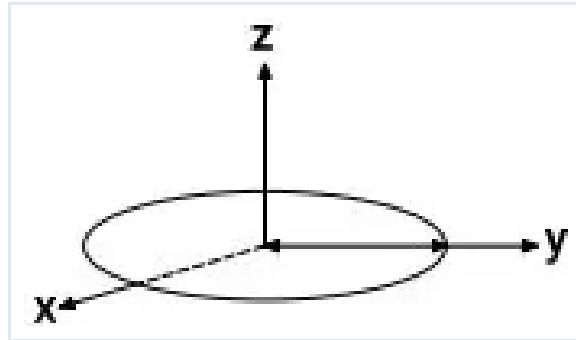
$$I = \frac{1+3}{12}mL^2$$



ممان اینرسی حلقه دایره ای

$$I_z = mr^2$$

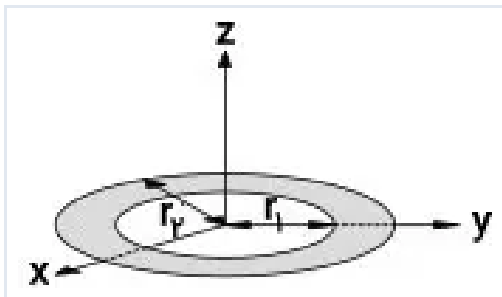
$$I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2$$



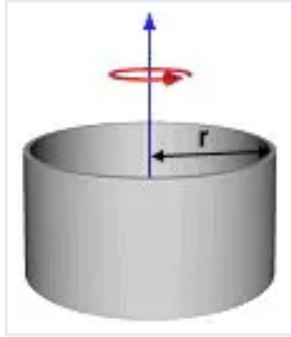
ممان اینرسی حلقه دارای ضخامت

$$I_z = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{4}m(r_1^2 + r_2^2)$$

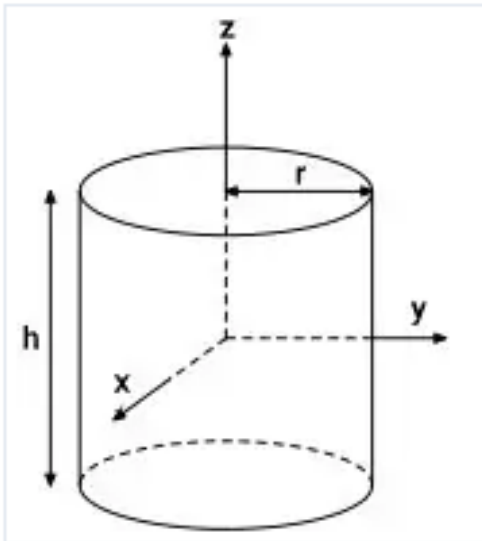


ممان اینرسی استوانه توخالی



$$I \approx mr^2$$

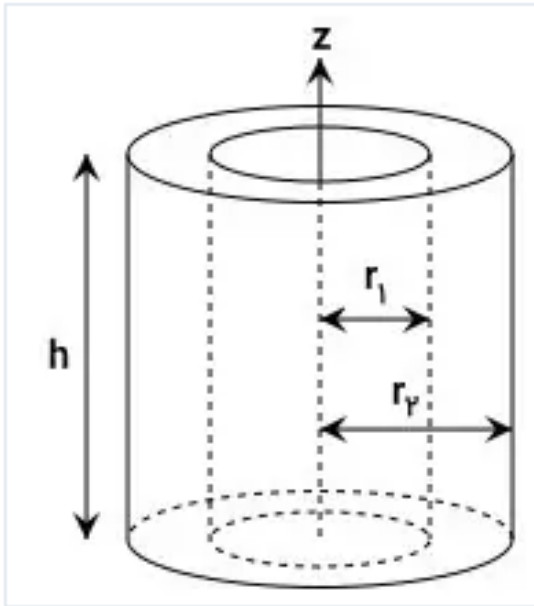
ممان اینرسی استوانه توپر



$$I_z = \frac{1}{2}mr^2$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{12}m(r^2 + h^2)$$

ممان اینرسی لوله استوانه ای با جداره ضخیم



$$I_z = \frac{1}{4} m (r_2^4 + r_1^4) = m r_2^4 \left(1 - t - \frac{t^4}{4} \right)$$

t، از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$t = \frac{r_2 - r_1}{r_2}$$

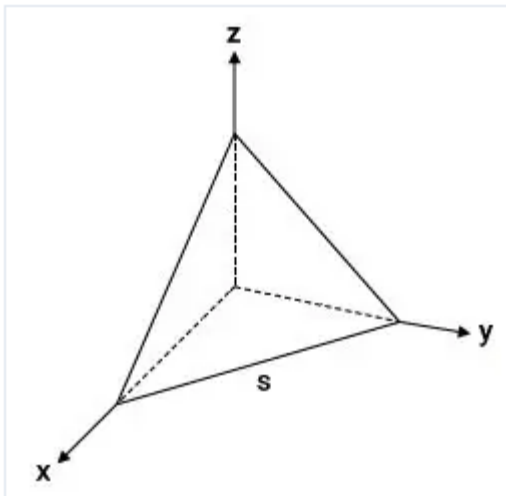
این پارامتر، نسبت ضخامت نرمال شده را نمایش می‌دهد. لختی دورانی لوله حول محورهای X و Y، عبارت است از:

$$I_x = I_y = \frac{1}{12} m [3(r_2^4 + r_1^4) + h^4]$$

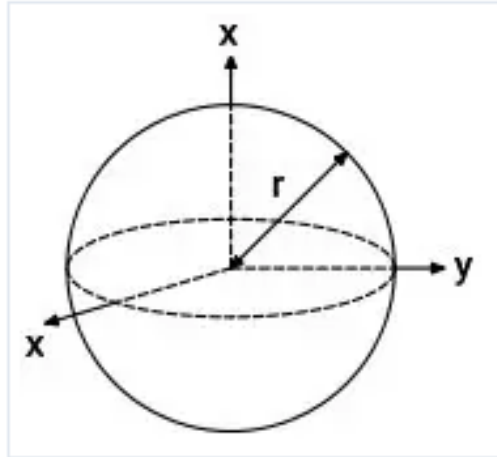
ممان اینرسی هرم مثلثی

توپر $I = \frac{1}{20} m s^2$

تو خالی $I = \frac{1}{12} m s^2$

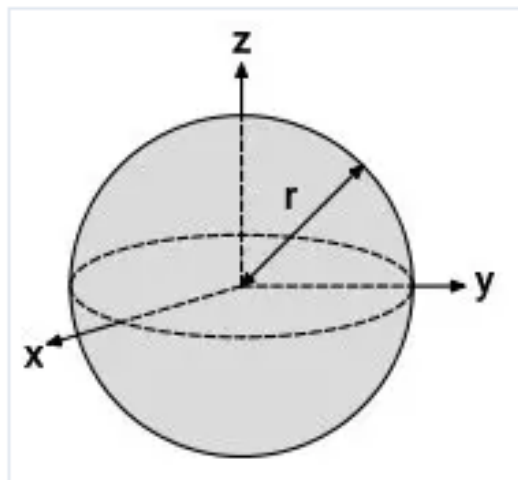


ممان اینرسی کره



$$I = \frac{2}{5} m r^2$$

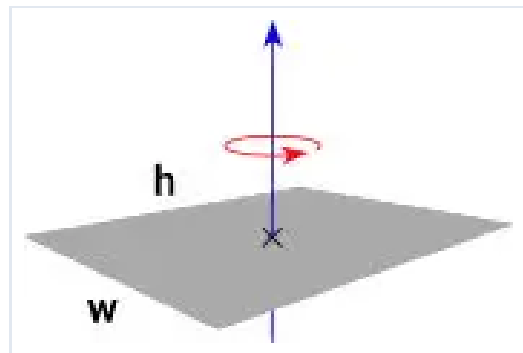
توپر



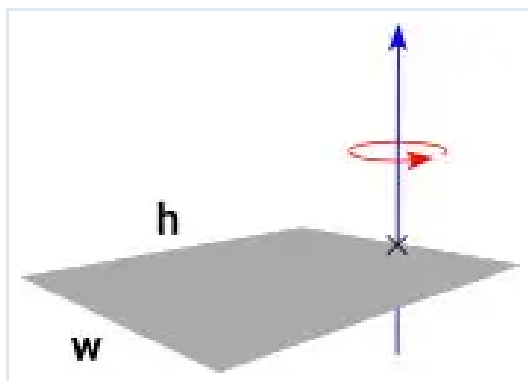
$$I = \frac{2}{3} m r^2$$

تو خالی

ممان اینرسی صفحه مستطیلی



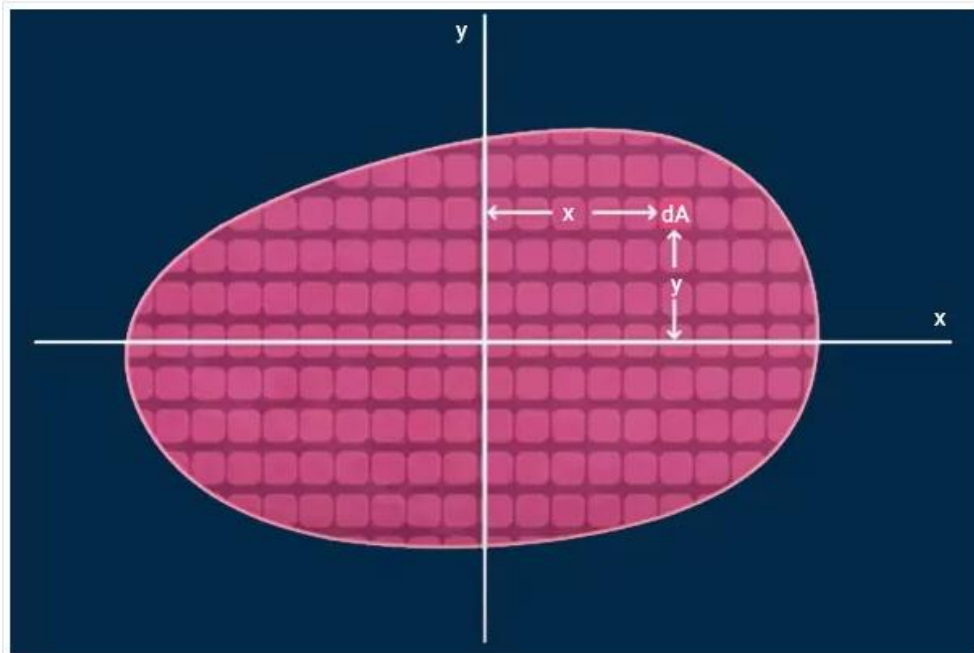
$$I = \frac{1}{12} m (h^2 + w^2)$$



$$I = \frac{1}{12} m (4h^2 + w^2)$$

گشتاور دوم سطح

گشتاور دوم سطح، مجموع فاصله هر نقطه از مقطع دوبعدی یک جسم تا محور مبنا را نمایش می‌دهد. به عنوان مثال، مقطع زیر را در نظر بگیرید. برای محاسبه ممان اینرسی این مقطع نسبت، باید فاصله هر یک از نقاط آن تا محور مبنا مورد نظر را به دست بیاوریم.



$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$


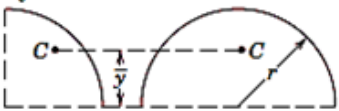
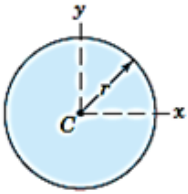
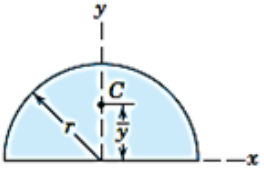
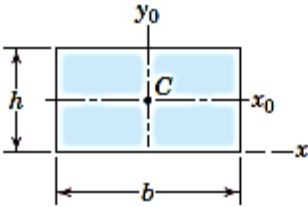
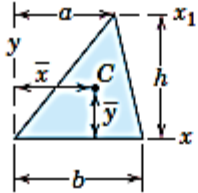
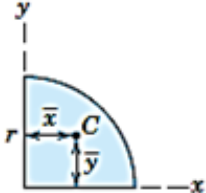
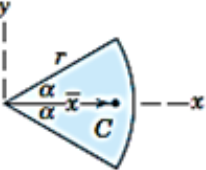
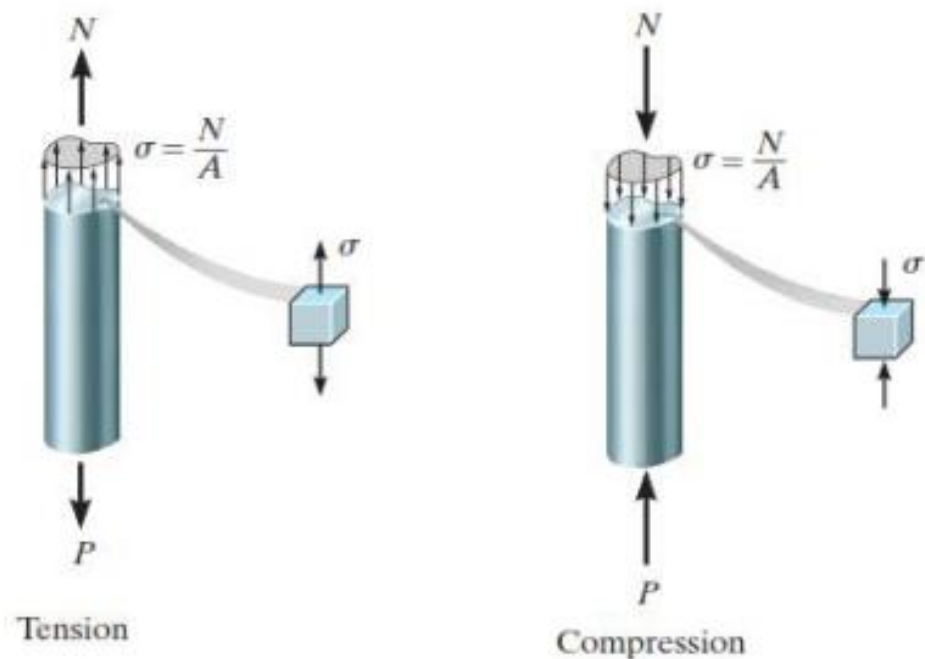
FIGURE	CENTROID	AREA MOMENTS OF INERTIA
Arc Segment 	$\bar{r} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	—
Quarter and Semicircular Arcs 	$\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	—
Circular Area 	—	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_z = \frac{\pi r^4}{2}$
Semicircular Area 	$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{8}$ $\bar{I}_x = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)r^4$ $I_z = \frac{\pi r^4}{4}$

FIGURE	CENTROID	AREA MOMENTS OF INERTIA
Rectangular Area 	—	$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_z = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
Triangular Area 	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_{x_1} = \frac{bh^3}{4}$
Quarter-Circular Area 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4$ $I_z = \frac{\pi r^4}{8}$
Area of Circular Sector 	$\bar{x} = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	$I_x = \frac{r^4}{4} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)$ $I_y = \frac{r^4}{4} \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)$ $I_z = \frac{1}{2} r^4 \alpha$

کشش

مفاهیم



تنش عمودی

یکی از مهمترین مفاهیم در مقاومت مصالح، تنش است. تنش ها انواع مختلفی دارند و نوع آنها با وارد شدن نیرو به اجسام تعریف می شود. به زبان ساده با F/A تعریف می شود. اگر جسمی وجود داشته باشد که سطح آن را A بنامیم و نیرویی به صورت عمودی به آن وارد گردد که F در نظرش بگیریم در اینجا می گوییم تنش عمودی صورت گرفته است. خود تنش عمودی به دو دسته تنش تقسیم می شود. تنش کششی و تنش فشاری.

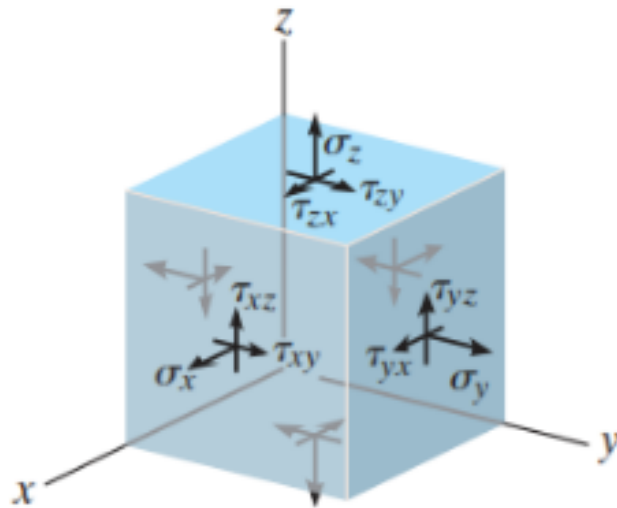
$$\sigma = F/A$$

مفاهیم

تنش مماسی یا برشی

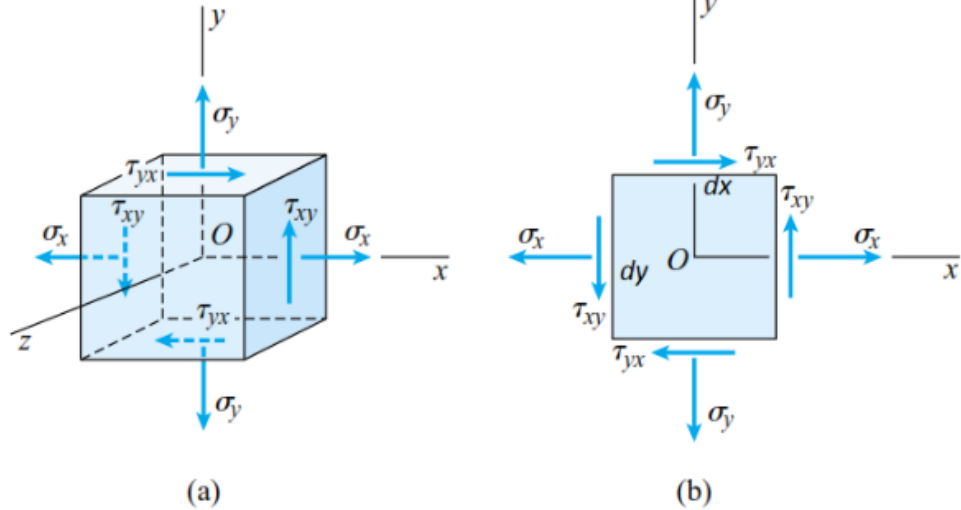
اگر نیرو بر سطح جسم مماس باشد به آن تنش مماسی یا برشی می‌گوییم. واحد تنش پاسکال است. اگر مقدار تنش بدست آمده زیاد باشد آن را با کیلوپاسکال یا مگاپاسکال بیان می‌کنیم.

$$\tau = F/A$$



$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

مفاهیم



با توجه به تعادل این جزء کوچک، می‌توان رابطه لنگر را نسبت به نقطه O نوشت:

$$M_o = 0 \quad +2(\tau_{yx})(dx \cdot dz) \frac{dy}{2} - 2(\tau_{xy})(dy \cdot dz) \frac{dx}{2} = 0$$

در این معادله، به ترتیب از چپ به راست، پرانتز اول نشان دهنده تنش، دومی سطحی که تنش بر آن اثر می‌کند و سومی بازوی لنگر است. با ساده کردن این معادله می‌توان نتیجه گرفت:

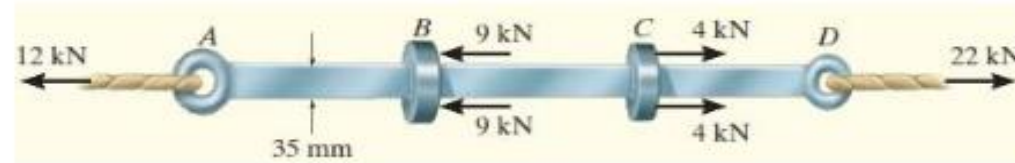
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

به‌طور مشابه و با نوشتن این معادله برای وجوه دیگر المان تنش، می‌توان نتیجه گرفت:

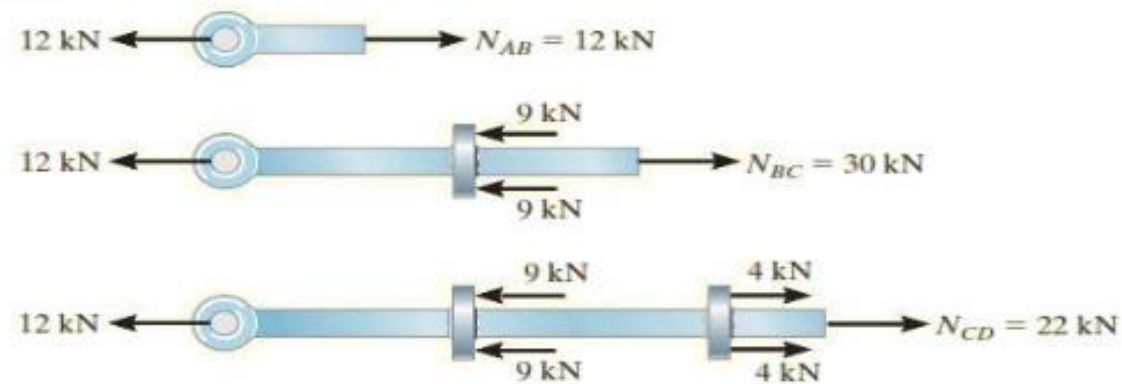
$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

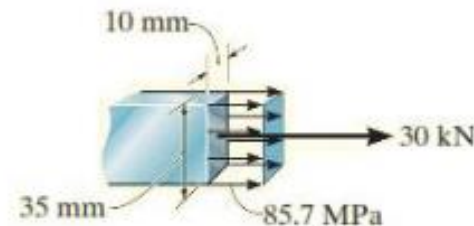
مثال ۱: بیشترین تنش عمودی را در میله مطابق شکل زیر، با مقطع ثابت مستطیلی به طول 35 mm و عرض 10 mm، تحت اثر بارگذاری نشان داده شده به دست آورید.



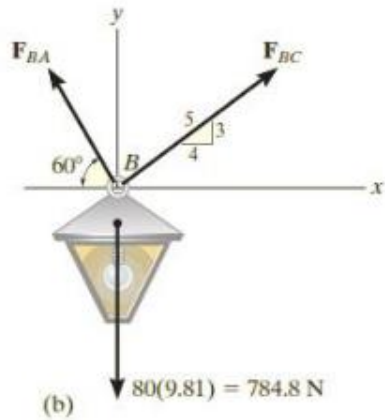
حل: ابتدا نیروهای داخلی در مقاطع مختلف میله فوق و نمودار نیروی محوری در طول عضو ترسیم می‌گردد:



همان‌طور که ملاحظه می‌شود، بیشترین نیروی داخلی در فاصله BC ایجاد شده است که تنش در این مقطع برابر است با:



$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{30(10^3) \text{ N}}{(0.035 \text{ m})(0.010 \text{ m})} = 85.7 \text{ MPa}$$



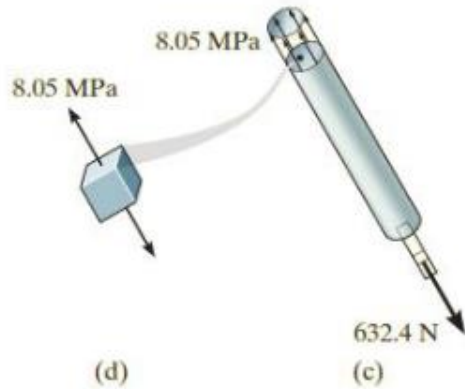
حل: ابتدا نمودار جسم آزاد را ترسیم می‌کنیم و با فرض $g=9.81m/s^2$ وزن چراغ را بر حسب نیوتن قرار می‌دهیم. با نوشتن معادلات تعادل، نیروهای داخلی در میله‌ها به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; & \quad F_{BC}\left(\frac{4}{5}\right) - F_{BA} \cos 60^\circ = 0 \\ +\uparrow \Sigma F_y = 0; & \quad F_{BC}\left(\frac{3}{5}\right) + F_{BA} \sin 60^\circ - 784.8 \text{ N} = 0 \\ & \quad F_{BC} = 395.2 \text{ N}, \quad F_{BA} = 632.4 \text{ N} \end{aligned}$$

تنش عمودی در هر یک از میله‌ها برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} \sigma_{BC} &= \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{395.2 \text{ N}}{\pi(0.004 \text{ m})^2} = 7.86 \text{ MPa} \\ \sigma_{BA} &= \frac{F_{BA}}{A_{BA}} = \frac{632.4 \text{ N}}{\pi(0.005 \text{ m})^2} = 8.05 \text{ MPa} \end{aligned}$$

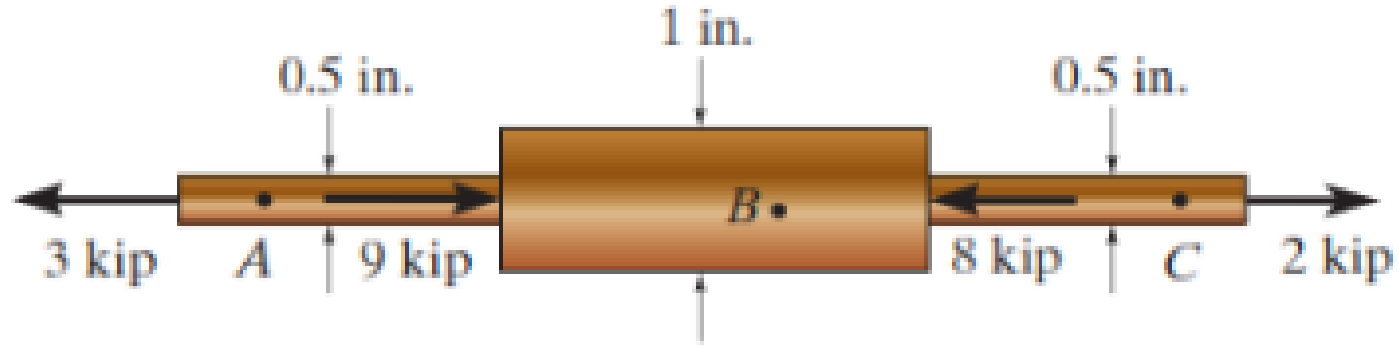
توزیع تنش متوسط عمودی در میله AB در شکل (c) نشان داده شده است. شکل (d) نیز یک المان از این میله را که در نقطه‌ای از مقطع مورد نظر واقع شده است، نشان می‌دهد.



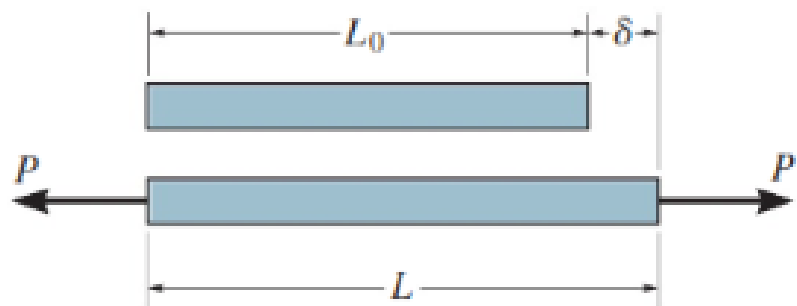
مثال ۲: چراغی به وزن 80 kg مطابق شکل (a) توسط دو میله نگه‌داشته شده است. اگر قطر میله AB مساوی با 10 mm و میله BC برابر با 8 mm باشد، تنش عمودی متوسط را در هر یک از میله‌ها بر حسب Mpa محاسبه کنید.



کوئیز: تنش عمودی را در نقاط A, B, C محاسبه نمایید.



مفاهیم

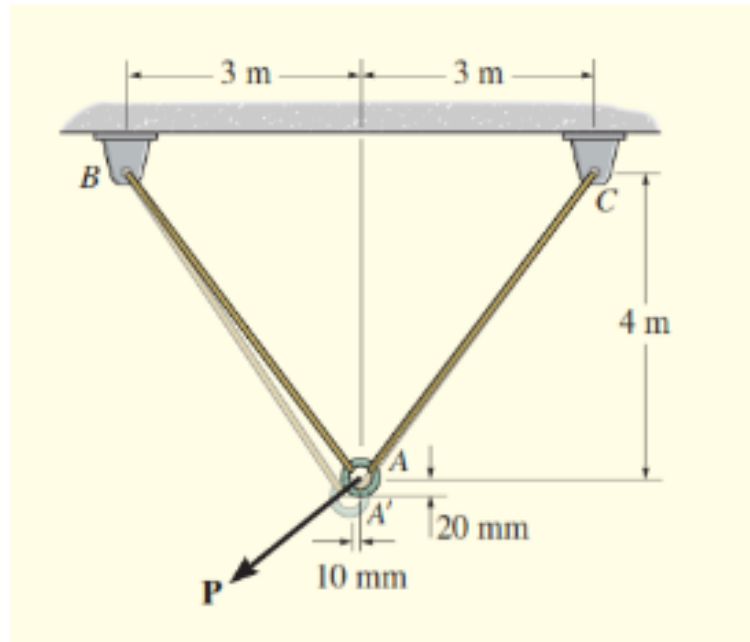


کرنش

کرنش در واقع زمانی اتفاق می‌افتد که نیرویی که بر سازه وارد می‌گردد موجب تغییر شکل آن سازه می‌گردد در واقع کرنش نسبت تغییر شکل طول بر طول اصلی است. کرنش را به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\varepsilon = \Delta L / L_0 = (L - L_0) / L_0$$

مثال ۱: تغییر فرم نسبی عمودی متوسط را در دو مفتول مطابق شکل زیر محاسبه کنید. تحت اثر نیروی P حلقه اتصال از نقطه A به A' منتقل شده است.



حل: طول هر کدام از مفتول‌ها برابر است با:

$$L_{AB} = L_{AC} = \sqrt{(3 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} = 5 \text{ m}$$

طول نهایی نیز عبارت است از:

$$L_{A'B} = \sqrt{(3 \text{ m} - 0.01 \text{ m})^2 + (4 \text{ m} + 0.02 \text{ m})^2} = 5.01004 \text{ m}$$

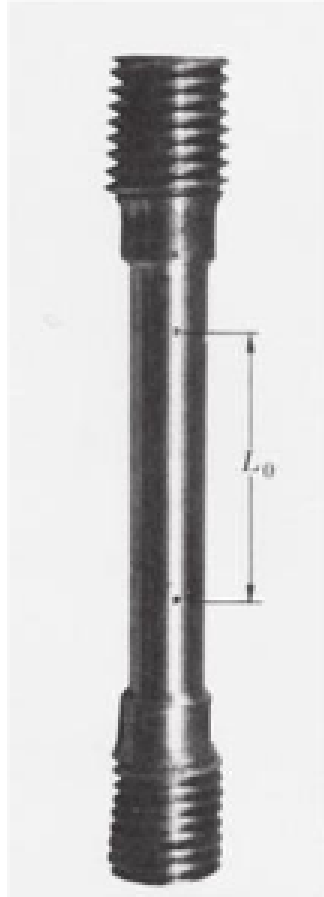
$$L_{A'C} = \sqrt{(3 \text{ m} + 0.01 \text{ m})^2 + (4 \text{ m} + 0.02 \text{ m})^2} = 5.02200 \text{ m}$$

تغییر فرم نسبی متوسط در هر یک از میله‌ها برابر است با:

$$\epsilon_{AB} = \frac{L_{A'B} - L_{AB}}{L_{AB}} = \frac{5.01004 \text{ m} - 5 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 2.01(10^{-3}) \text{ m/m}$$

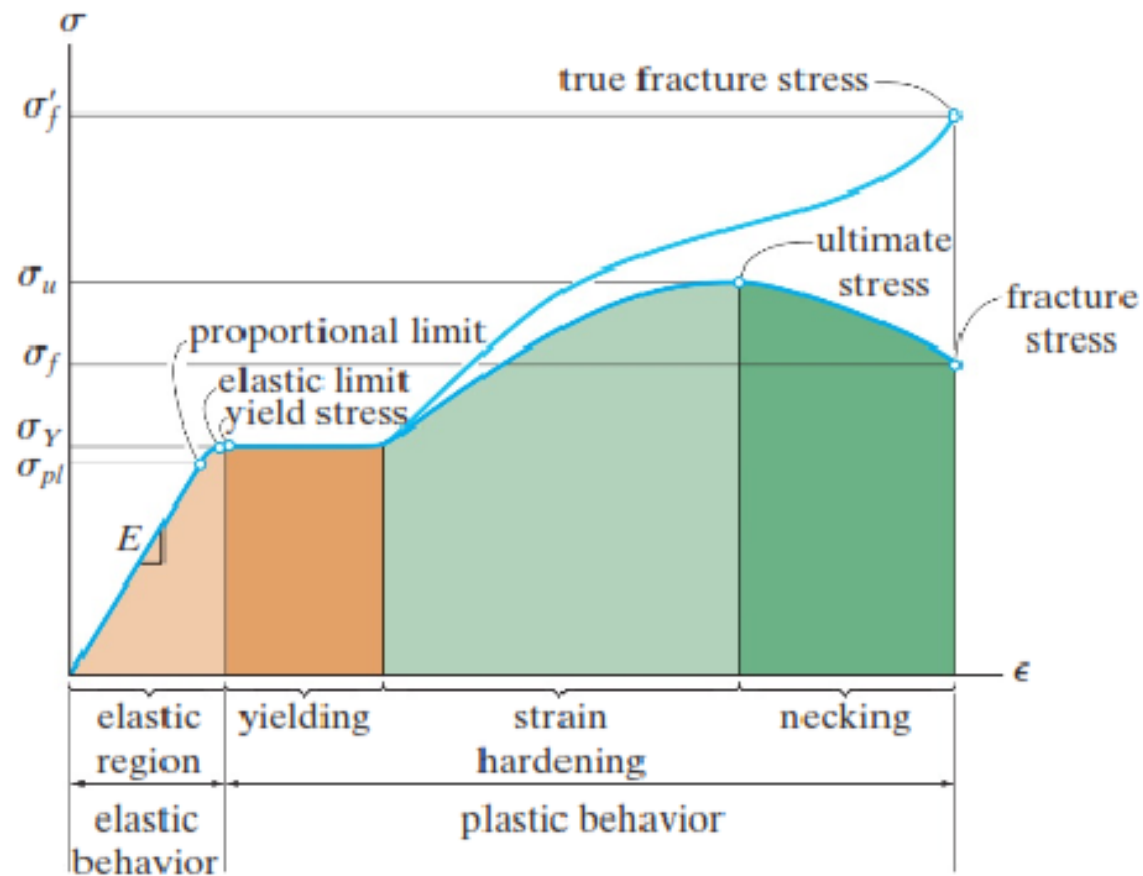
$$\epsilon_{AC} = \frac{L_{A'C} - L_{AC}}{L_{AC}} = \frac{5.02200 \text{ m} - 5 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 4.40(10^{-3}) \text{ m/m}$$

نمودار تنش-تغییر فرم نسبی

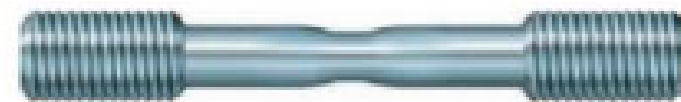


آزمایش کشش ساده: برای ترسیم نمودار تنش-تغییر فرم نسبی مصالح، معمولاً از یک آزمایش کششی ساده بر روی نمونه‌ای از آن استفاده می‌شود. البته لازم به ذکر است که این آزمایش معمولاً بر روی مصالح انعطاف‌پذیر که خاصیت کشسانی دارند، انجام می‌شود. در شکل رو به‌رو، یک نمونه فلزی با سطح مقطع دایره‌ای نشان داده شده است. دو علامت روی میله، به فاصله L_0 از یکدیگر مشخص می‌شود. این طول، فاصله مقیاس (Gage Length) نامیده می‌شود. این نمونه توسط یک دستگاه تست کشش مورد آزمایش قرار می‌گیرد. در این آزمایش، نیروی کششی P بر نمونه وارد می‌شود و تحت اثر این نیرو، طول نمونه افزایش می‌یابد؛ در نتیجه به طول L_0 نیز افزوده می‌شود. طول افزایش یافته L در هر لحظه از انجام آزمایش، اندازه‌گیری می‌شود و افزایش طول $\delta = L - L_0$ نظیر هر مقدار P ثبت می‌شود. ϵ از تقسیم δ بر طول اولیه L_0 محاسبه می‌شود. تغییرات قطر نمونه نیز همزمان قابل اندازه‌گیری است. از طرف دیگر، تنش σ نیز از تقسیم P بر سطح مقطع اولیه A_0 به دست می‌آید.





Conventional and true stress–strain diagram for ductile material (steel) (not to scale)



Necking

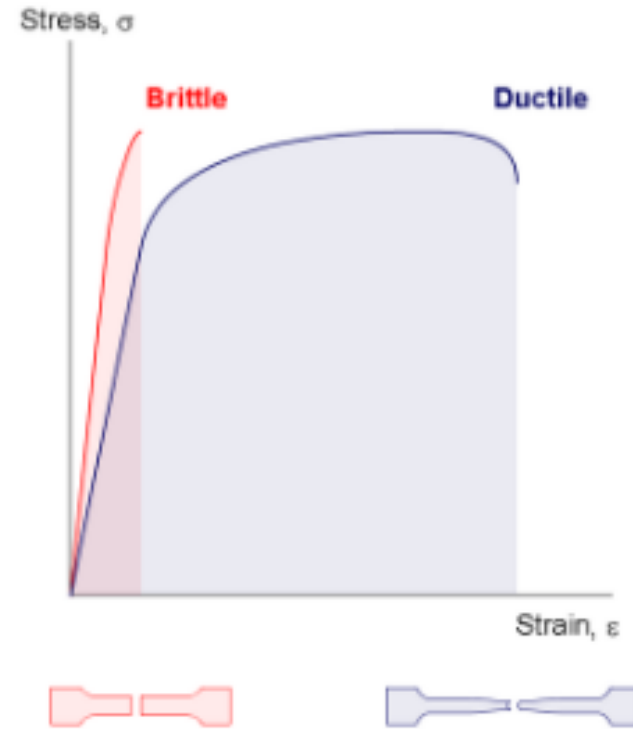
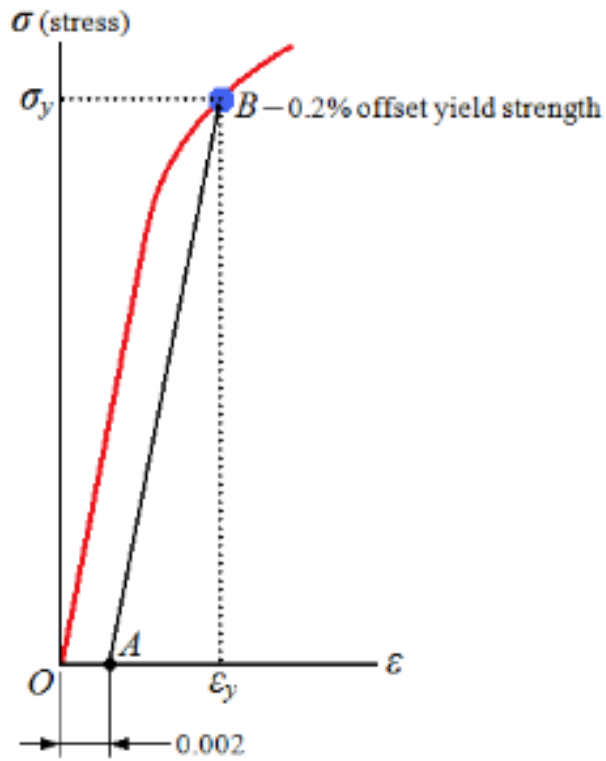
(a)



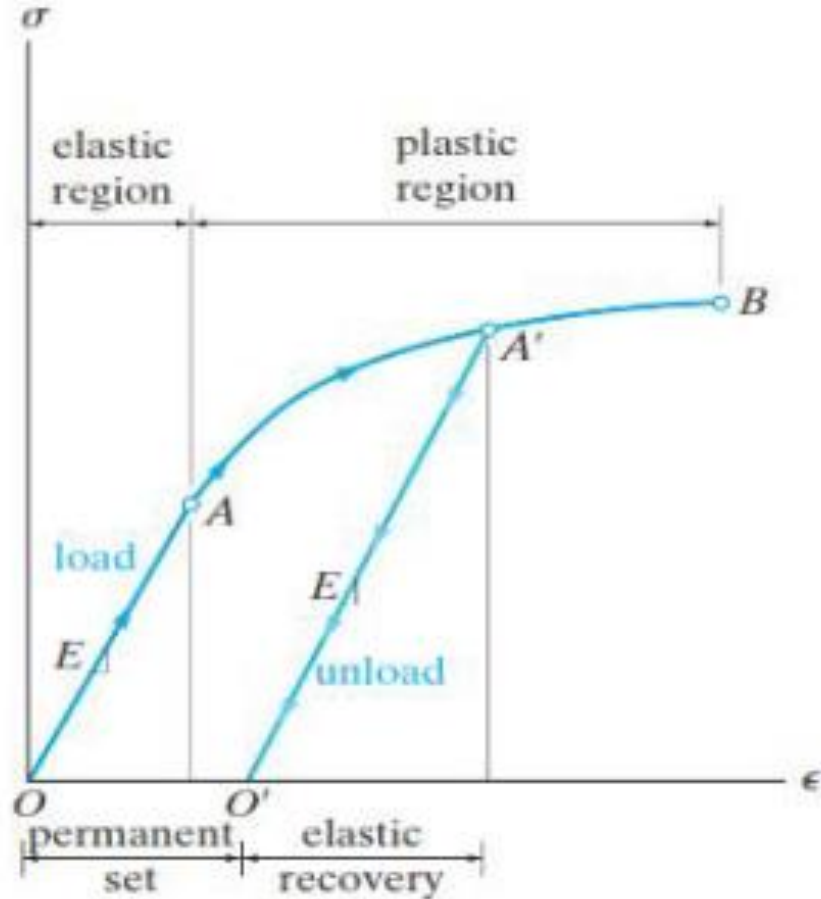
Failure of a ductile material

(b)

پیدا کردن نقطه تسلیم نمودار تنش- کرنش مواد ترد و داکتیل



قانون هوک و هولمن



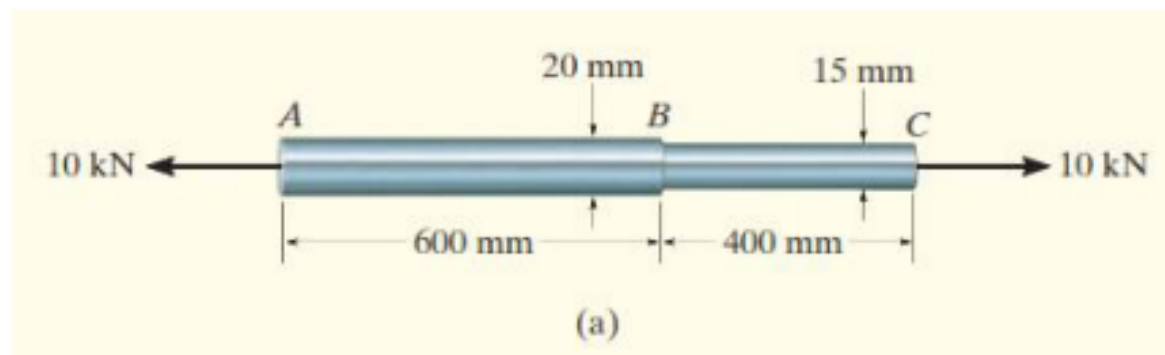
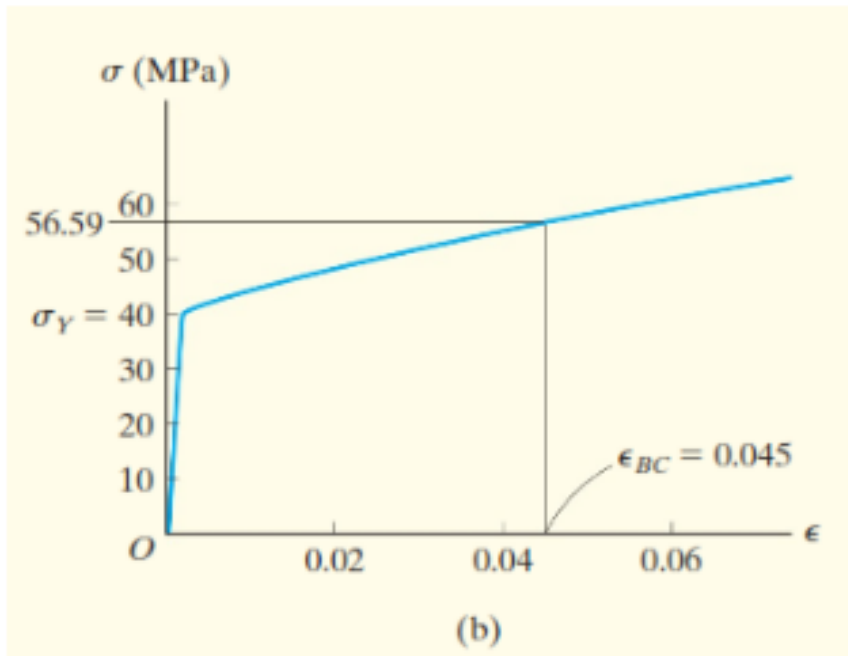
قانون هوک (الاستیک)

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

قانون هولمن (پلاستیک)

$$\sigma = K \cdot \epsilon^n$$

مثال ۱: میله آلومینیومی مطابق شکل (a)، با مقطع دایره‌ای، تحت اثر نیروی محوری کششی 10 kN در دو انتها قرار گرفته است. اگر نمودار تنش-تغییر فرم نسبی این میله مطابق با شکل (b) باشد، ازدیاد طول تقریبی این میله را تحت اثر این نیرو محاسبه کنید. ($E_{al} = 70 \text{ GPa}$)



حل: برای محاسبهٔ ازدیاد طول میله، نخست باید تغییر فرم نسبی آن را به دست آوریم. پس از محاسبهٔ تنش در هر کدام از قسمت‌های میله، با استفاده از نمودار، تغییر فرم نسبی محاسبه می‌شود.

$$\sigma_{AB} = \frac{N}{A} = \frac{10(10^3) \text{ N}}{\pi(0.01 \text{ m})^2} = 31.83 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N}{A} = \frac{10(10^3) \text{ N}}{\pi(0.0075 \text{ m})^2} = 56.59 \text{ MPa}$$

چون تنش در ناحیهٔ AB از تنش حد تسلیم کم‌تر است، رفتار میله در این ناحیه ارتجاعی است، در نتیجه قانون هوک صادق است:

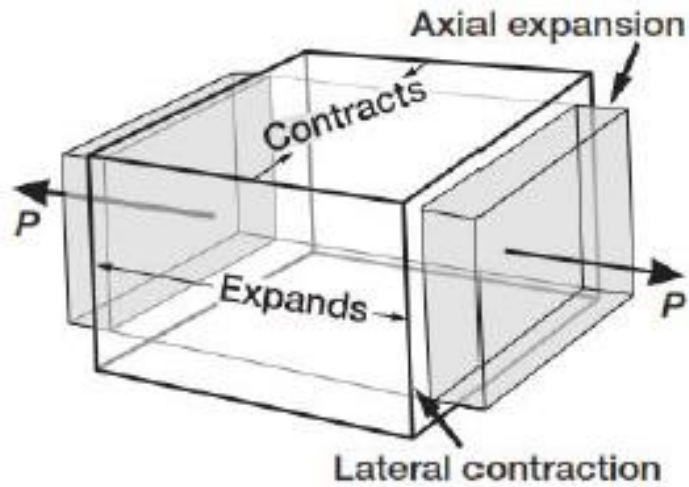
$$\epsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E_{al}} = \frac{31.83(10^6) \text{ Pa}}{70(10^9) \text{ Pa}} = 0.0004547 \text{ mm/mm}$$

اما در طول BC از میله، تنش از حد تسلیم فراتر

رفته است و رفتار میله غیر ارتجاعی یا خمیری است؛ در نتیجه قانون هوک برای آن برقرار نیست و تغییر فرم نسبی از روی نمودار به صورت تقریبی برابر با $\epsilon_{BC} \approx 0.045 \text{ mm/mm}$ به دست می‌آید. بنابراین، افزایش طول میله عبارت است از:

$$\begin{aligned} \delta &= \sum \epsilon L = 0.0004547(600 \text{ mm}) + 0.0450(400 \text{ mm}) \\ &= 18.3 \text{ mm} \end{aligned}$$

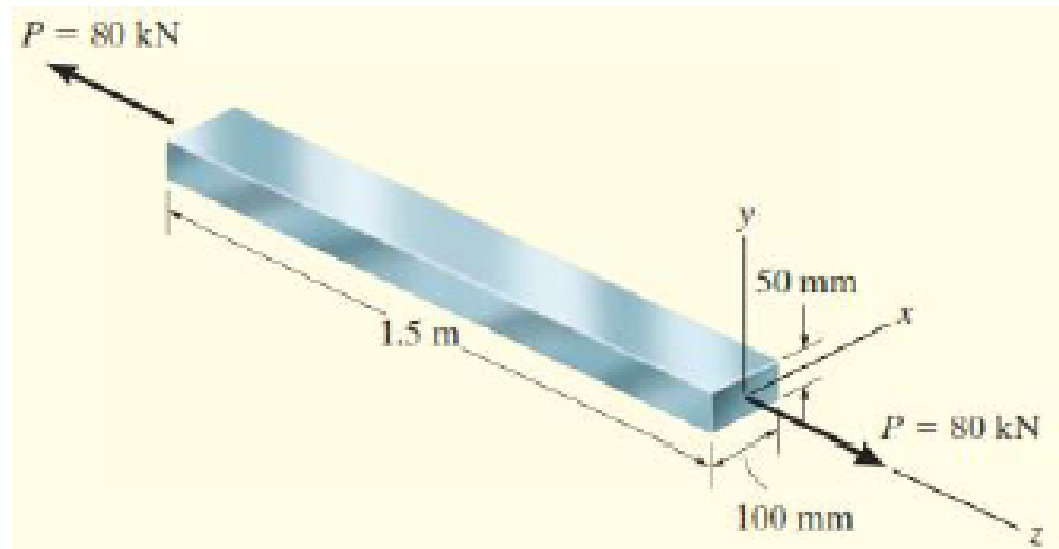
ضریب پواسون



افزایش طول یک عضو تحت اثر نیروی محوری کششی، همواره با انقباض جانبی عمود بر امتداد نیرو همراه است و کاهش طول آن تحت بار فشاری، انبساط جانبی را به دنبال دارد. نسبت تغییر فرم نسبی جانبی به تغییر فرم محوری یک عضو، نسبت پواسون نامیده شده و با حرف یونانی ν (نو) نشان داده می‌شود. این نام‌گذاری به افتخار **Siméon Denis Poisson (1781-1840)** ریاضی‌دان فرانسوی، انجام شده است. اگر تغییر فرم نسبی طولی را با ϵ_{long} و تغییر فرم نسبی جانبی را با ϵ_{lat} نشان دهیم، نسبت پواسون را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\nu = - \frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{long}}$$

علامت منفی در رابطه فوق، به این دلیل است که همواره علامت تغییر فرم نسبی جانبی و محوری مخالف یکدیگر است. اما همیشه قدر مطلق آن، که مقداری است بین صفر و نیم، در نظر گرفته می‌شود. برای چوب پنبه مقدار آن برابر با صفر و مواد تراکم‌ناپذیری مثل لاستیک، برابر با 0.5 است. اما مقدار معمول آن برای مصالح ساختمانی، بین 0.25 تا 0.355 به دست آمده است.



مثال ۹: میله فولادی به طول 1.5 m مطابق شکل روبه‌رو، تحت اثر بار محوری $P=80 \text{ kN}$ قرار گرفته است. تغییر طول میله و تغییر ابعاد مقطع آن را محاسبه کنید. رفتار میله را در محدوده ارتجاعی خطی فرض کنید.

$$E_{st} = 200 \text{ GPa.}$$

$$\nu_{st} = 0.32$$

حل: تنش عمودی در میله برابر است با:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{80(10^3) \text{ N}}{(0.1 \text{ m})(0.05 \text{ m})} = 16.0(10^6) \text{ Pa}$$

تغییر فرم نسبی در امتداد Z نیز برابر است با:

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E_{st}} = \frac{16.0(10^6) \text{ Pa}}{200(10^9) \text{ Pa}} = 80(10^{-6}) \text{ mm/mm}$$

بنابراین تغییر طول میله عبارت است از:

$$\delta_z = \epsilon_z L_z = [80(10^{-6})](1.5 \text{ m}) = 120 \mu\text{m}$$

تغییر فرم نسبی جانبی میله در دو امتداد X و Y برابر است با:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu_{st} \epsilon_z = -0.32[80(10^{-6})] = -25.6 \mu\text{m/m}$$

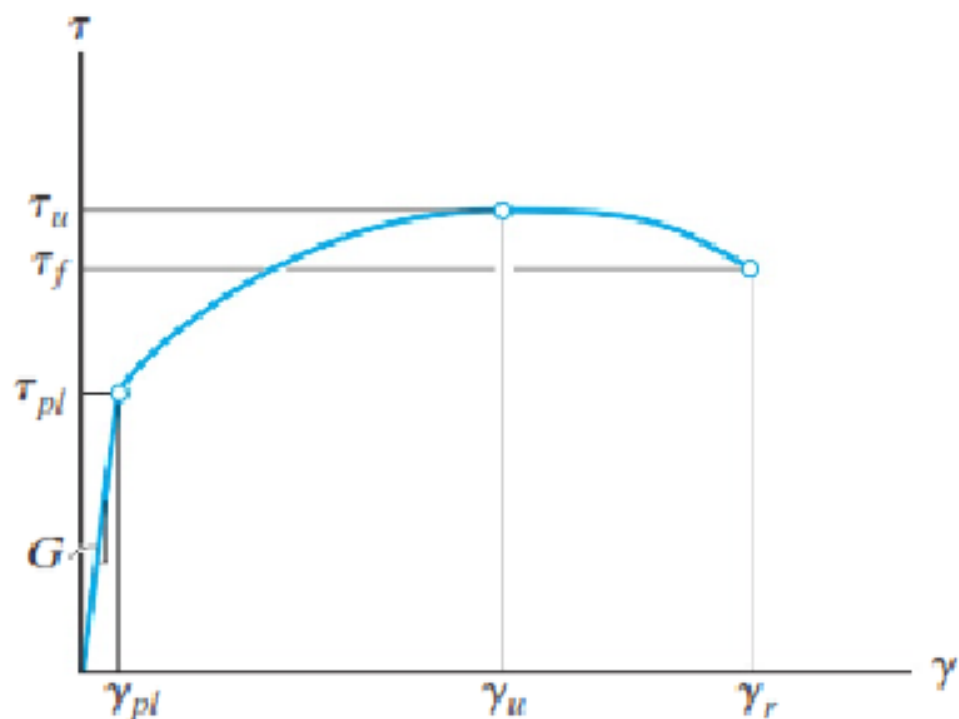
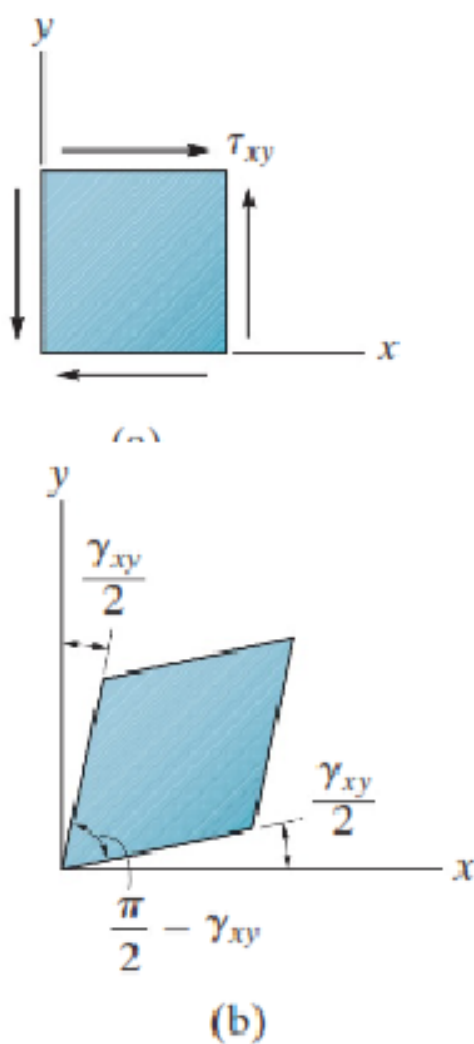
بدین ترتیب، تغییر ابعاد مقطع نیز محاسبه می‌شود:

$$\delta_x = \epsilon_x L_x = -[25.6(10^{-6})](0.1 \text{ m}) = -2.56 \mu\text{m}$$

$$\delta_y = \epsilon_y L_y = -[25.6(10^{-6})](0.05 \text{ m}) = -1.28 \mu\text{m}$$

نمودار تنش - تغییر فرم نسبی برشی (The Shear Stress-Strain Diagram)

شکل (a) یک المان کوچک همگن و ایزوتروپ را تحت اثر برش خالص و شکل (b)، تغییر فرم نسبی برشی تحت اثر تنش‌های حاصل از آن نشان می‌دهد. نمودار تنش-تغییر فرم نسبی برشی برای مصالح انعطاف‌پذیر، مشابه نمودار تنش-تغییر فرم نسبی عمودی برای این نوع مصالح می‌تواند به شکل زیر ترسیم شود:

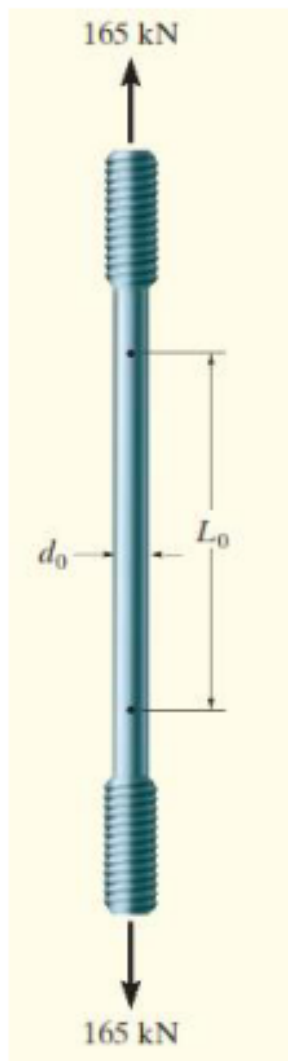


از لحظه شروع بارگذاری تا رسیدن به تنش برشی حد تناسب τ_{pl} ، رفتار مصالح در محدوده ارتجاعی خطی قرار دارد و پس از آن تا رسیدن به تنش برشی نهایی τ_u وارد ناحیه خمیری می‌شود و در نهایت هم در لحظه گسیختگی تنش برشی برابر با τ_f خواهد بود. در محدوده ارتجاعی خطی رابطه هوک را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\tau = G\gamma$$

در این رابطه، G مدول الاستیسیته برشی نامیده می‌شود و برابر است با شیب نمودار تنش- تغییر فرم نسبی برشی. واحد آن نیز همانند تنش برشی، بر حسب Mpa یا psi بیان می‌شود. سه مشخصه ثابت مصالح (E ، G و ν)، با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



مثال ۱۰: یک نمونه آلومینیومی به قطر $d_0 = 25 \text{ mm}$ در شکل (a) نشان داده شده است، در یک آزمایش کشش، طول اندازه‌گیری آن $L_0 = 250 \text{ mm}$ ، تحت اثر نیروی محوری 165 kN ، به اندازه 1.2 mm افزایش یافته است. مدول الاستیسیته این نمونه و تغییر قطر آن را محاسبه کنید.

$$G_{al} = 26 \text{ GPa} \quad \sigma_y = 440 \text{ MPa}$$

حل:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{165 (10^3) \text{ N}}{(\pi/4) (0.025 \text{ m})^2} = 336.1 \text{ MPa}$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{1.20 \text{ mm}}{250 \text{ mm}} = 0.00480 \text{ mm/mm}$$

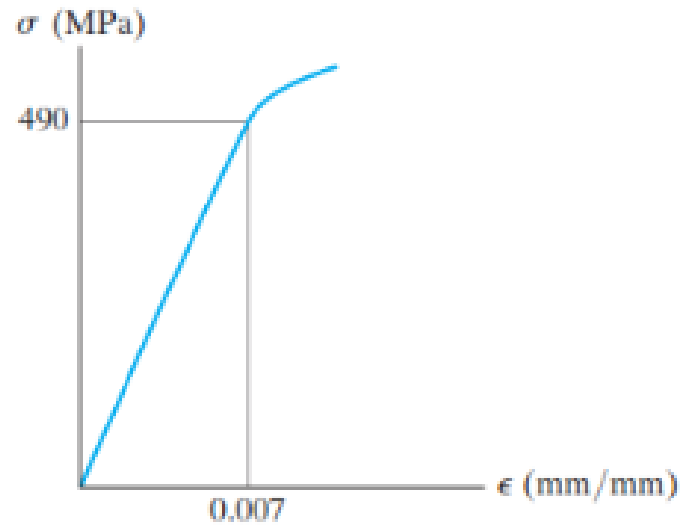
چون تنش در میله هنوز به حد تسلیم ($\sigma_y = 440 \text{ MPa}$) نرسیده است، رفتار نمونه در محدوده ارتجاعی قرار دارد؛ بنابراین رابطه هوک برقرار است و مدول الاستیسیته آن برابر است با:

$$E_{al} = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{336.1 (10^6) \text{ Pa}}{0.00480} = 70.0 \text{ GPa}$$

برای محاسبه تغییر قطر نمونه، نخست لازم است نسبت پواسون را به دست آوریم:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$
$$26 \text{ GPa} = \frac{70.0 \text{ GPa}}{2(1 + \nu)}$$
$$\nu = 0.347$$

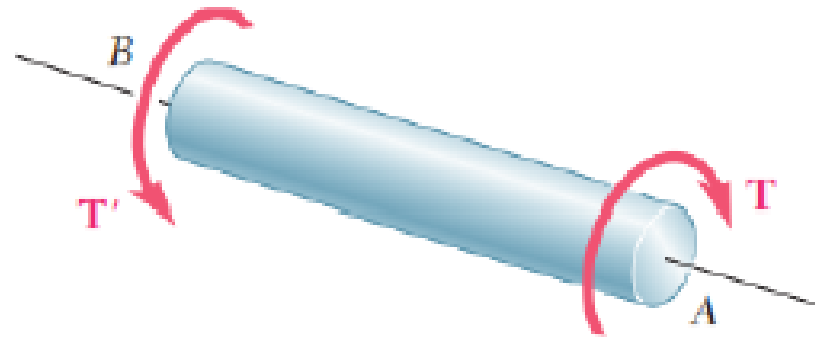
$$0.347 = -\frac{\epsilon_{\text{lat}}}{0.00480 \text{ mm/mm}}$$
$$\delta' = (0.00166)(25 \text{ mm})$$
$$= 0.0416 \text{ mm}$$



تمرین: بخش ارتجاعی از نمودار تنش-تغییر فرم نسبی یک نمونه آلومینیومی به طول اندازه 50.8 mm و قطر 12.7 mm در شکل مقابل نشان داده شده است. اگر نیروی کششی $P=60$ kN بر این نمونه وارد شود، طول اندازه و قطر نمونه را به دست آورید. $\nu = 0.35$

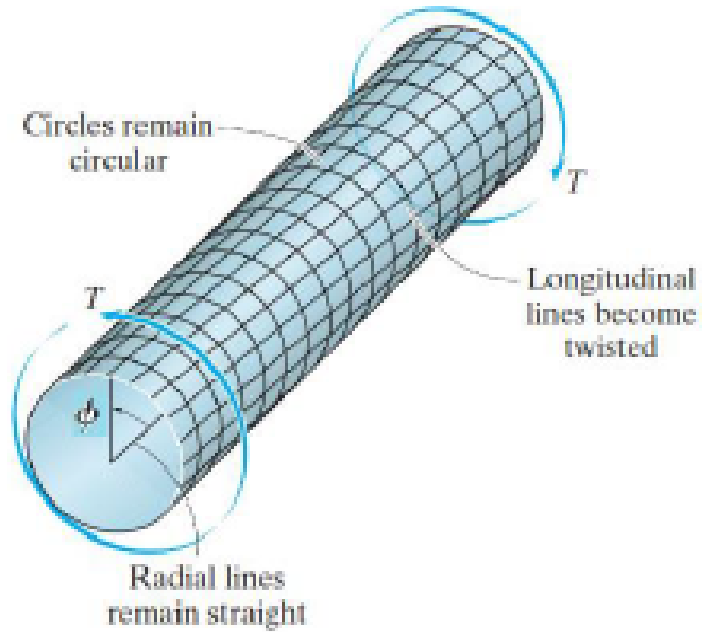
پیش

پیچش میله با مقطع دایره‌ای (محور Shaft)



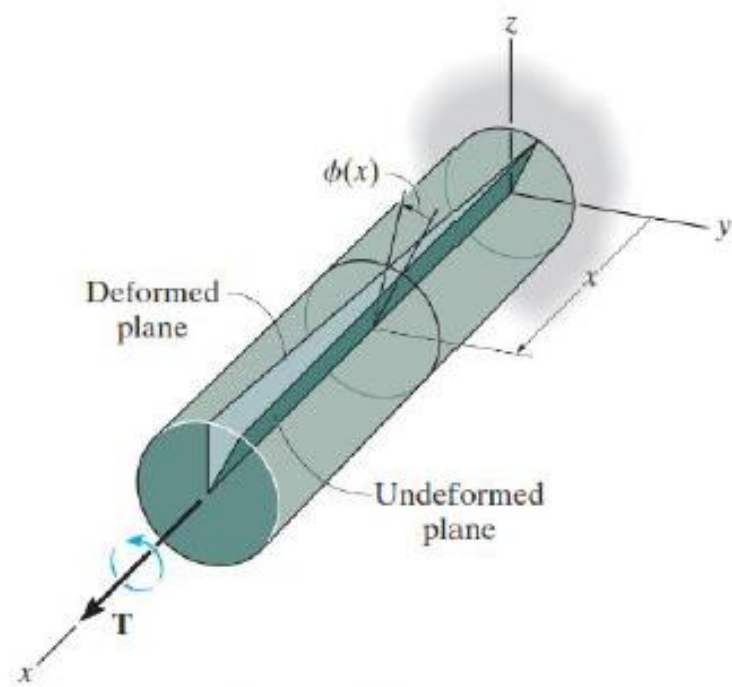
میله‌ای با مقطع دایره‌ای را که تحت اثر یک کوپل پیچشی قرار گرفته است، در نظر بگیرید. این حالت بارگذاری «پیچش خالص» نامیده می‌شود. با توجه به تقارن، می‌توان نشان داد که مقاطع عرضی میله، مانند اجسام صلبی حول محور طولی میله دوران می‌کنند؛ به طوری که شعاع‌ها، مستقیم و مقاطع عرضی به صورت دایره‌ای باقی می‌مانند.

همچنین، اگر زاویه پیچش کل میله کوچک باشد، طول میله و شعاع آن تغییر نخواهد کرد. لازم به ذکر است که در این فصل، تغییر شکل‌ها کوچک، و رابطه تنش-تغییر فرم نسبی خطی فرض می‌شود. به طور تجربی و نیز نتایج حاصل از مطالعات دقیق نشان می‌دهد که:

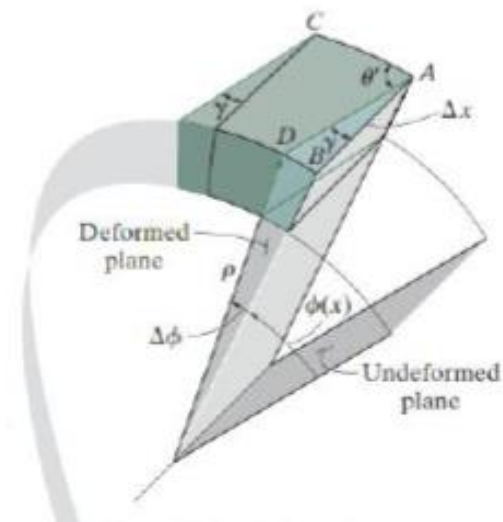
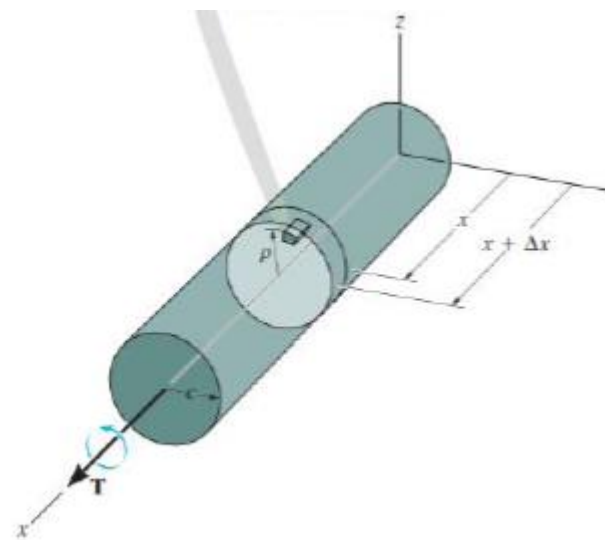


- ۱- محور میله مستقیم باقی می ماند؛
- ۲- مقاطع میله به صورت مدور باقی می مانند؛
- ۳- طول میله تغییر نمی کند؛
- ۴- قطر میله تغییر نمی کند؛
- ۵- مقاطع اولیه عمود بر محور میله، مسطح باقی می مانند؛
- ۶- هر قطر یا شعاع، به صورت قطر یا شعاع باقی می ماند.

در هنگام پیچش، یک انتهای میله نسبت به انتهای دیگر آن، دورانی حول محور طولی میله خواهد داشت. برای مثال، اگر انتهای سمت راست میله را ثابت فرض کنیم، انتهای سمت چپ آن، به اندازه ϕ که «زاویه پیچش» نامیده می‌شود، دوران خواهد کرد؛ در نتیجه، عنصر مستطیلی کوچک روی سطوح جانبی میله، واقع در بین دو مقطع عرضی به فاصله بسیار کوچک dx از یکدیگر، تغییر شکل داده، به صورت متوازی‌الاضلاع درمی‌آید. به عبارت دیگر، زوایای بین اضلاع عنصر سطحی، بدون آن که طول اضلاعشان تغییر یابد، در اثر پیچش تغییر خواهند کرد. بر اساس آن چه در شکل زیر نمایش داده شده است، زاویه پیچش به موقعیت x بستگی دارد و در طول محور، به صورت خطی تغییر می‌کند.



The angle of twist $\phi(x)$ increases as x increases.



زاویه بین لبه‌های AB و AC در شکل مقابل، پیش از دوران، $\frac{\pi}{2}$ بوده است که پس از دوران به: $\theta' = \frac{\pi}{2} - \gamma$ تغییر یافته است. طول قوس BD که بر روی دایره‌ای به شعاع ρ واقع شده است، با توجه به شکل، برابر است با:

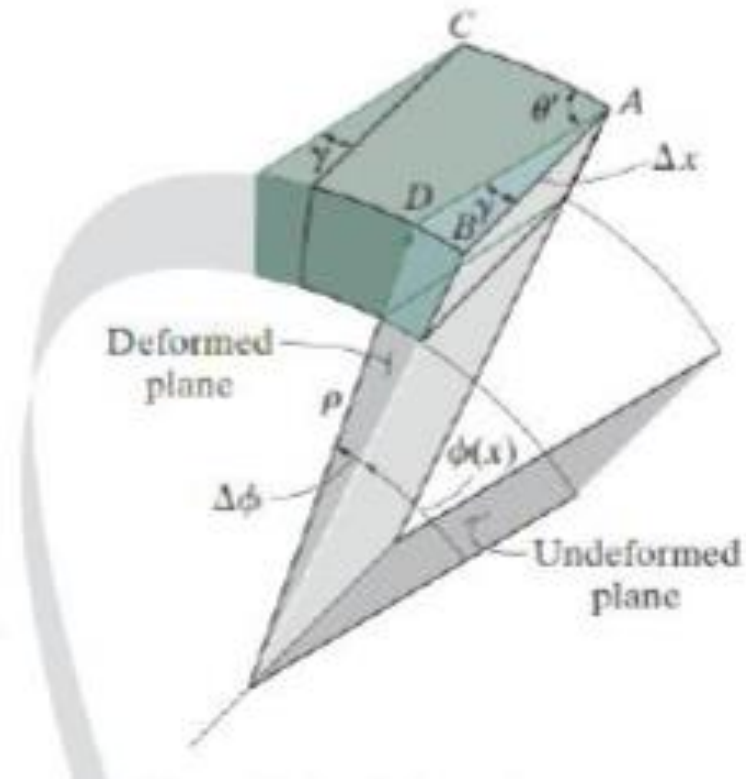
$$BD = \rho \Delta\phi \quad (1)$$

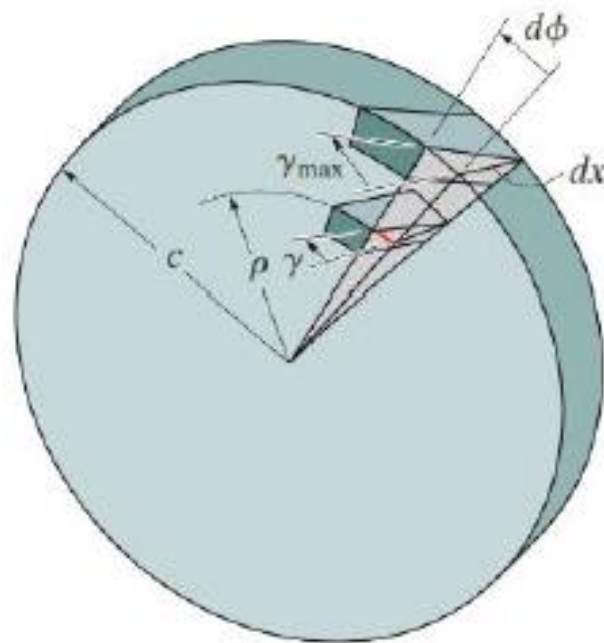
زاویه γ را نیز می‌توان چنین تعریف کرد:

$$\gamma = \frac{BD}{\Delta x} \quad (2)$$

بنابراین، اگر مقدار BD را از رابطه (1) در معادله (2) قرار دهیم و با در نظر گرفتن: $\Delta x \rightarrow dx$ و $\Delta\phi \rightarrow d\phi$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}$$



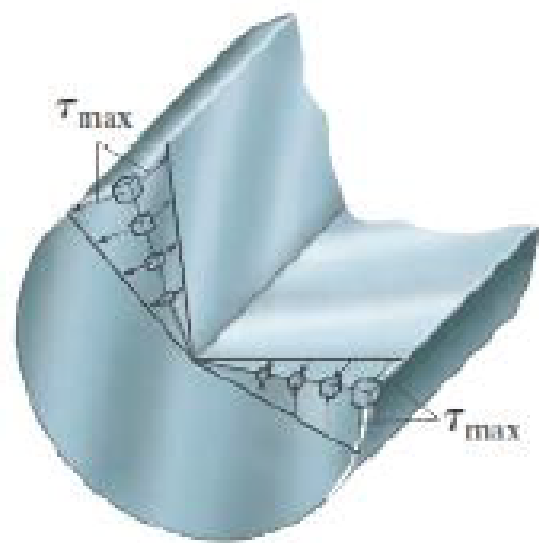


چون dx و $d\phi$ برای تمام اجزای واقع در نقاط روی مقطع برش زده شده در x یکسانند، بنابراین، $d\phi/dx$ روی سطح مقطع ثابت است و از معادله فوق می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که «مقدار تغییر فرم نسبی برشی برای هر جزء، فقط با فاصله شعاعی ρ از مرکز میله تغییر می‌کند.» به عبارت دیگر، تغییر فرم نسبی برشی داخل مقطع، به صورت خطی در طول شعاع، از صفر در مرکز میله تا حداکثر γ_{max} در سطح خارجی آن تغییر می‌کند. یعنی تغییر فرم نسبی برشی در هر نقطه از شعاع مقطع میله برابر است با:

$$\gamma = \left(\frac{\rho}{c}\right) \gamma_{max}$$

و با توجه به خطی بودن تغییرات زاویه دوران در طول میله، دوران کل میله برابر خواهد بود با:

$$\gamma = \rho \frac{\phi}{L} \quad \text{و} \quad \gamma_{max} = c \frac{\phi}{L}$$



$$\gamma = \rho \frac{\varphi}{L} \quad \text{و} \quad \gamma_{max} = c \frac{\varphi}{L}$$

در محدوده ارتجاعی خطی که تنش برشی با تغییر فرم نسبی نظیر آن متناسب است، توزیع تنش مطابق شکل مقابل خواهد بود. مقدار تنش در هر نقطه روی شعاع میله برابر است با:

$$\tau = \left(\frac{\rho}{c}\right) \tau_{max} \quad \text{و} \quad \tau = G\gamma = G\rho \frac{\varphi}{L}$$

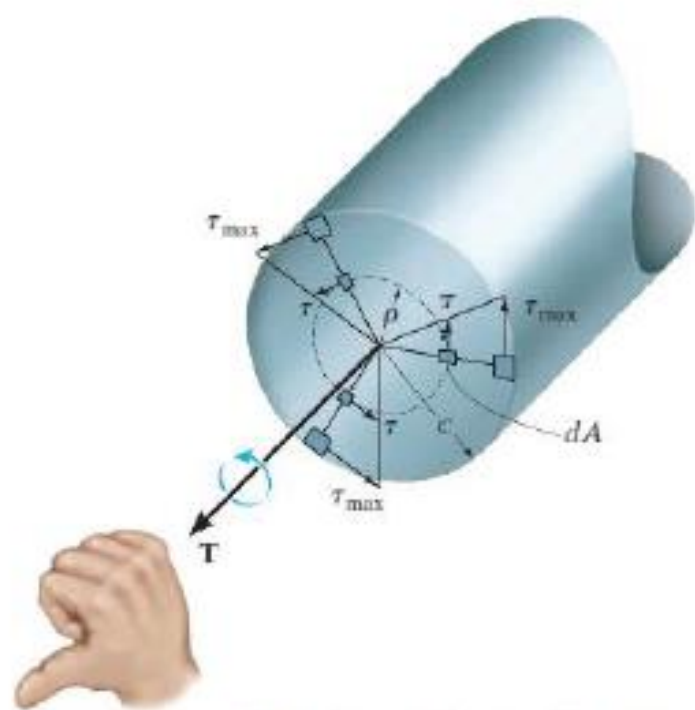
رابطه بین لنگر پیچشی با تنش برشی

در هنگام اعمال لنگر پیچشی خارجی T بر میله مطابق شکل، برای حفظ تعادل مقطع، باید گشتاور پیچشی ایجاد شده به وسیله توزیع تنش برشی روی کل سطح مقطع، معادل با لنگر پیچشی وارده باشد. هر جزء سطح dA به فاصله ρ از مرکز میله، تحت اثر نیروی $dF = \tau dA$ قرار دارد و گشتاور حاصل از آن حول مرکز، برابر است با $dT = \rho(\tau dA)$. بنابراین، برای کل سطح مقطع میله می توان نوشت:

$$T = \int_A \rho(\tau dA) = \int_A \rho \left(\frac{\rho}{c} \right) \tau_{\max} dA$$

و چون τ_{\max}/c مقدار ثابتی دارد، می تواند از انتگرال خارج شود: در نتیجه:

$$T = \frac{\tau_{\max}}{c} \int_A \rho^2 dA$$



Shear stress varies linearly along each radial line of the cross section.

انتگرال فوق، تنها به هندسه محور بستگی دارد و بیان کننده «معان اینرسی قطبی» سطح مقطع میله، حول محور طولی آن است که با J نشان داده می‌شود. بنابراین، معادله فوق را می‌توان مرتب نموده به صورت خلاصه‌تر به صورت زیر نوشت:

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

تنش در هر نقطه به فاصله ρ از مرکز میله نیز برابر خواهد بود با:

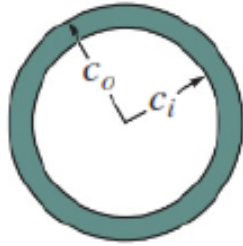
$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

برای یک میله توپر با مقطع دایره‌ای معان اینرسی قطبی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

و برای یک میله توخالی (محور لوله‌ای)، مقدار آن از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$J = \frac{\pi}{2} (c_o^4 - c_i^4)$$

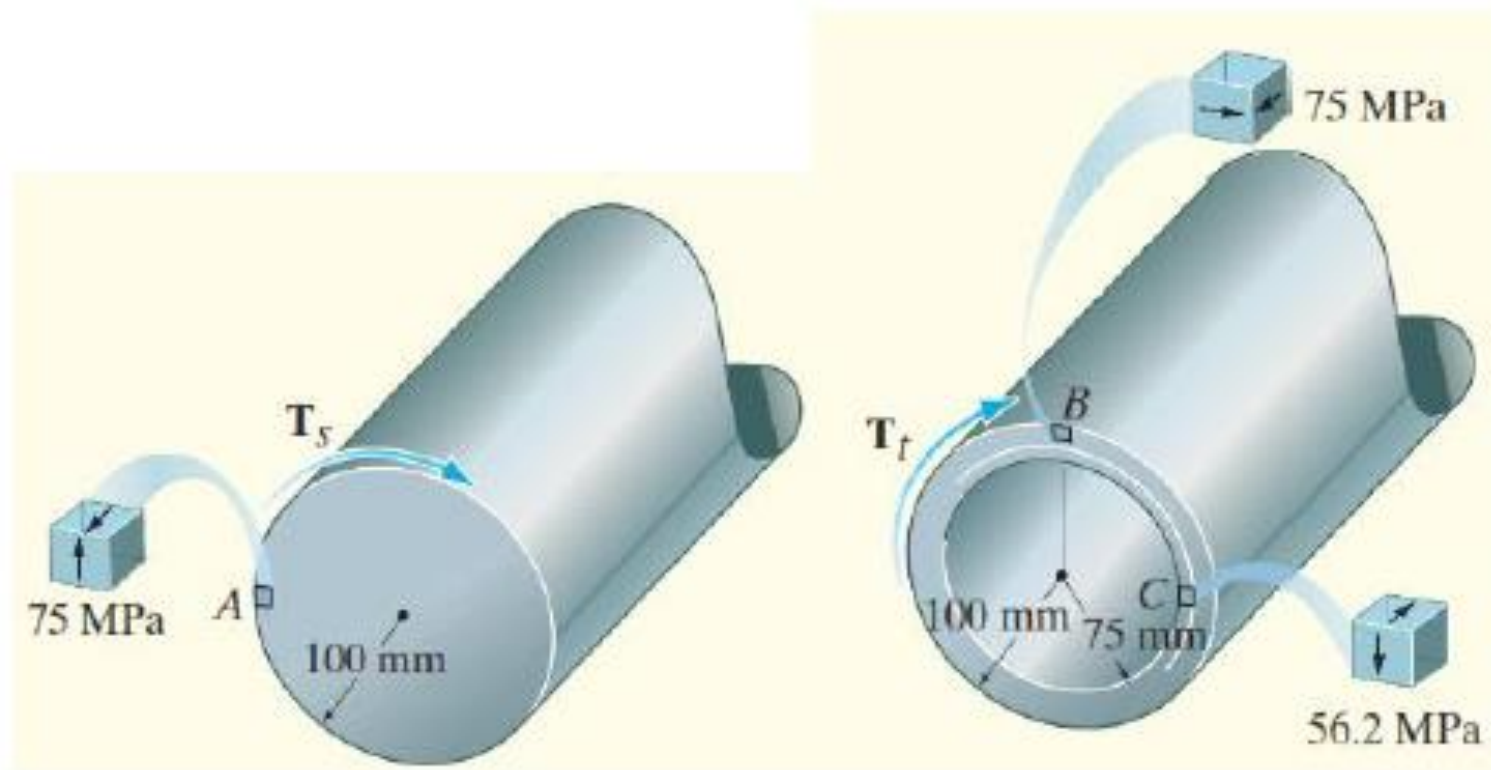


برای یک لوله جدار نازک، رابطه زیر می‌تواند جایگزین شود:

$$J = 2\pi c^3 t$$

در رابطه فوق، c شعاع متوسط و t ضخامت جدار لوله است.

مثال ۱: در شکل زیر، یک محور صلب و یک لوله هم جنس نشان داده شده است. در صورتی که تنش مجاز برشی آن‌ها برابر با 75 MPa باشد، بیش‌ترین لنگر پیچشی که می‌تواند بر سطح مقطع هر کدام وارد شود، چقدر است؟ همچنین، تنش برشی را در نقطه A از میله و نقاط B و C از لوله، محاسبه کنید.



حل: معان اینرسی قطبی مقاطع توپر و لوله‌ای برابرند با:

$$J_s = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0.1 \text{ m})^4 = 0.1571(10^{-3}) \text{ m}^4$$

$$J_t = \frac{\pi}{2} (c_o^4 - c_i^4) = \frac{\pi}{2} [(0.1 \text{ m})^4 - (0.075 \text{ m})^4] = 0.1074(10^{-3}) \text{ m}^4$$

لنگر پیچشی ماکزیمم مجاز برای هر یک از مقاطع، عبارت است از:

$$(\tau_{\max})_s = \frac{Tc}{J}; \quad 75(10^6) \text{ N/m}^2 = \frac{T_s(0.1 \text{ m})}{0.1571(10^{-3}) \text{ m}^4}$$

$$T_s = 118 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(\tau_{\max})_t = \frac{Tc}{J}; \quad 75(10^6) \text{ N/m}^2 = \frac{T_t(0.1 \text{ m})}{0.1074(10^{-3}) \text{ m}^4}$$

$$T_t = 80.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

تنش برشی در جداره داخلی لوله (نقطه C)، برابر است با:

$$(\tau_i)_t = \frac{80.5(10^3) \text{ N} \cdot \text{m} (0.075 \text{ m})}{0.1074(10^{-3}) \text{ m}^4} = 56.2 \text{ MPa}$$

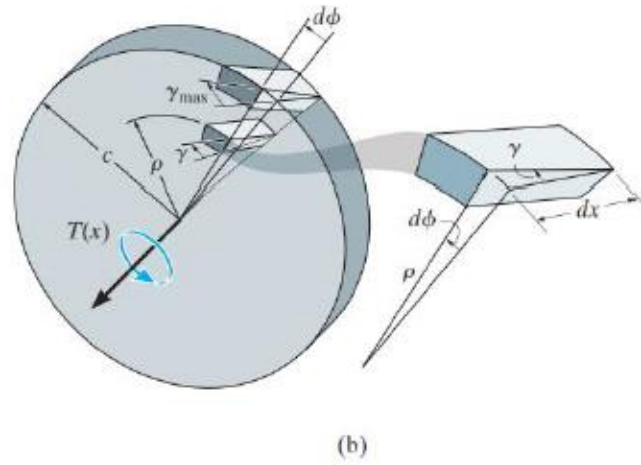
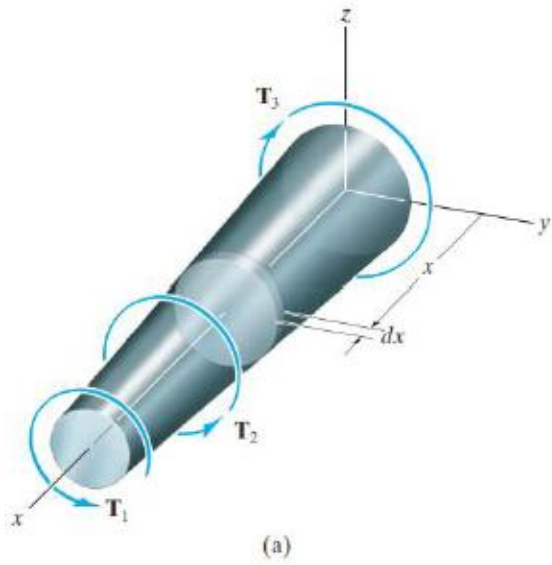
در وجوه خارجی A و B، همان تنش‌های برشی ماکزیمم ایجاد می‌شود که در شکل فوق نشان داده شده است. ضمناً باید توجه داشت که تنش در سطح آزاد هر یک از المعان‌های نشان داده شده باید برابر با صفر باشد.

رابطه زاویه پیچش با لنگر پیچشی

در طراحی یک محور تحت پیچش، علاوه بر محدودیت تنش برشی، لازم است تا میزان دوران آن نیز محدود شود. علاوه بر آن، در هنگام تحلیل محورهای نامعین استاتیکی، محاسبه زاویه پیچش برای نوشتن روابط سازگاری در کنار معادلات تعادل، برای تعیین واکنش‌های مجهول تکیه‌گاهی، ضروری است. بنابراین، تعیین زاویه پیچش φ برای هر دو نقطه دلخواه از محور نسبت به یکدیگر، اهمیت دارد.

در شکل زیر، یک محور دایره‌ای توپر که تحت لنگر پیچشی وارده به صورت ارتجاعی خطی عمل می‌کند، نشان داده شده است. اگر همان‌طور که پیش از این در مورد میله تحت بار محوری ذکر شد، از اثر تمرکز تنش در نقاط اعمال پیچش و مناطق دارای تغییر ناگهانی در مقطع، چشم‌پوشی کنیم، می‌توانیم تغییر زاویه را در محدوده بین هر دو نقطه‌ای که لنگر پیچشی در آن اعمال شده است، خطی فرض کنیم. جزء کوچکی به طول dx ، در موقعیت x ، از میله جدا شده و در شکل (b) نشان داده شده است. لنگر پیچشی $T(x)$ وارد بر این جزء، باعث چرخشی به اندازه $d\varphi$ در یکی از وجوه، نسبت به وجه دیگر آن می‌گردد. در نتیجه این چرخش، تغییر فرم نسبی برشی γ در جزء مشخص شده در شکل، با شعاع دلخواه ρ ، پدید می‌آید. در قسمت قبل نشان دادیم که مقادیر γ و $d\varphi$ با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx} \rightarrow d\varphi = \gamma \frac{dx}{\rho}$$



با قرار دادن مقدار γ از قانون هوک: $\gamma = \tau / G(x)$ و τ از رابطه‌ای که بین لنگر پیچشی و تنش برشی حاصل از آن به دست آمد:
 در رابطه فوق، به معادله زیر می‌رسیم:

$$d\phi = \frac{T(x)}{J(x)G(x)} dx$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه بر روی کل طول L ، زاویه پیچش کل محور به دست می‌آید:

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x) dx}{J(x)G(x)}$$

لنگر پیچشی و سطح مقطع ثابت: در کاربردهای مهندسی، معمولاً از مصالح همگن استفاده می‌شود، بنابراین G ثابت است. همچنین، اگر سطح مقطع و لنگر پیچشی وارده در طول محور ثابت باشند، رابطه فوق می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

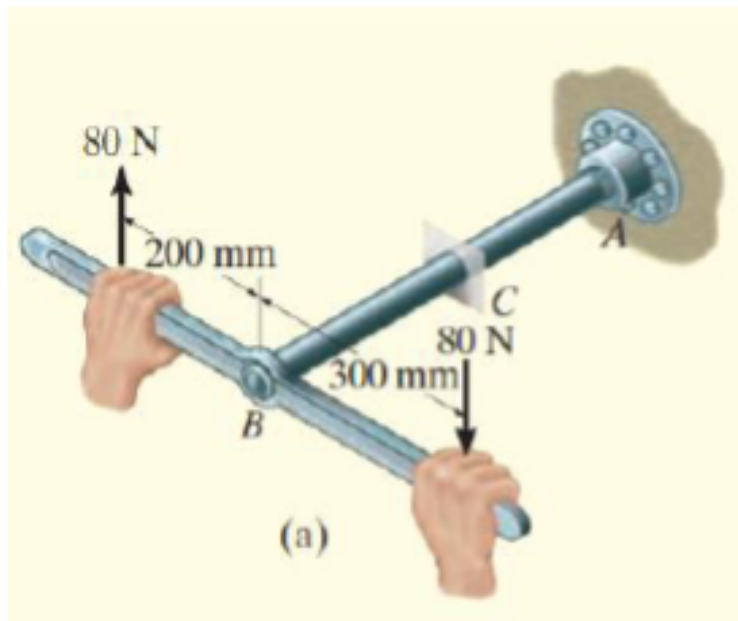
$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

از این رابطه برای به دست آوردن مدول الاستیسیته برشی مصالح استفاده می‌شود. به این ترتیب که نمونه‌ای با طول و قطر معلوم در دستگاهی مطابق شکل زیر تحت پیچش قرار می‌گیرد و با اعمال لنگر پیچشی در محدوده ارتجاعی، از رابطه مقدار $G = TL/J\phi$ آن محاسبه می‌شود. البته مقدار دقیق G از میانگین حاصل از چندین آزمایش به دست می‌آید.

پیچش‌های متعدد وارد بر محور:

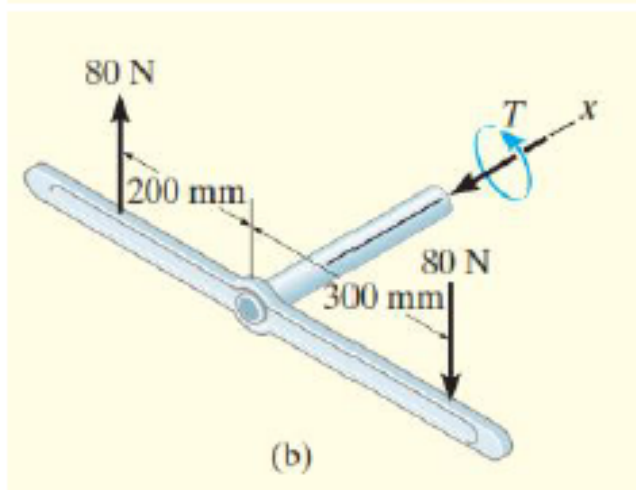
اگر محور تحت تأثیر چندین لنگر پیچشی مختلف قرار بگیرد، یا آن که سطح مقطع یا مدول برشی به‌طور ناگهانی تغییر کند، می‌توان برای هر قسمت از این محور که همه کمیت‌های مربوطه در آن ثابت باشند، رابطه فوق را به کار برد؛ آن‌گاه زاویه پیچش کلی را با جمع برداری زوایای به‌دست آمده از هر قسمت محاسبه کرد. بنابراین رابطه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\phi = \sum \frac{TL}{JG}$$



مثال ۲: لوله نشان داده شده در شکل روبه‌رو، دارای قطر داخلی 80 mm و قطر خارجی 100 mm است. اگر با استفاده از آچار لوله در B، انتهای لوله به تکیه‌گاه A محکم بسته شده باشد، تنش برشی به‌وجود آمده در ماده در دیواره‌های داخلی و خارجی بخش میانی لوله را، هنگامی که نیروی 80 N بر آچار وارد می‌شود، محاسبه کنید.

حل: محاسبه لنگر پیچشی داخلی: در موقعیت میانی C در طول محور لوله، مقطعی می‌زنیم. بر اساس نمودار جسم آزاد که در شکل (b) نشان داده شده است، تنها مجهول، لنگر پیچشی داخلی است که با نوشتن رابطه تعادل به دست می‌آید:

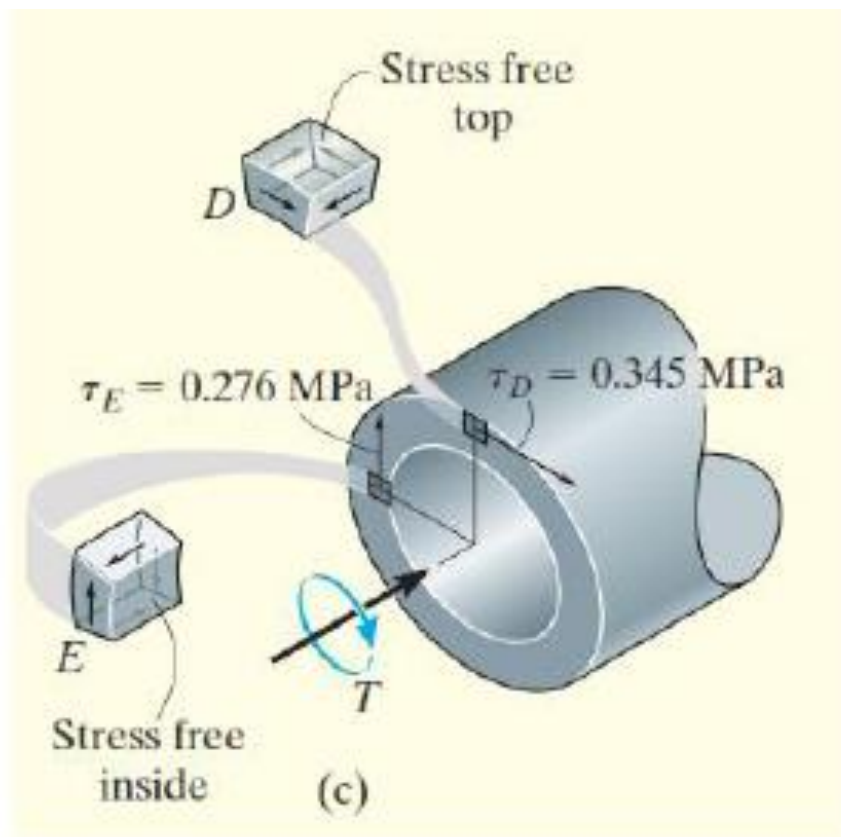


$$\Sigma M_x = 0; \quad 80 \text{ N}(0.3 \text{ m}) + 80 \text{ N}(0.2 \text{ m}) - T = 0$$

$$T = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$$

محاسبه ممان اینرسی قطبی مقطع:

$$J = \frac{\pi}{2} [(0.05 \text{ m})^4 - (0.04 \text{ m})^4] = 5.796 (10^{-6}) \text{ m}^4$$



تنش برشی: برای هر نقطه واقع بر سطح خارجی لوله،

$$\rho = c_o = 0.05 \text{ m}$$

بنابراین:

$$\tau_o = \frac{Tc_o}{J} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m} (0.05 \text{ m})}{5.796 (10^{-6}) \text{ m}^4} = 0.345 \text{ MPa}$$

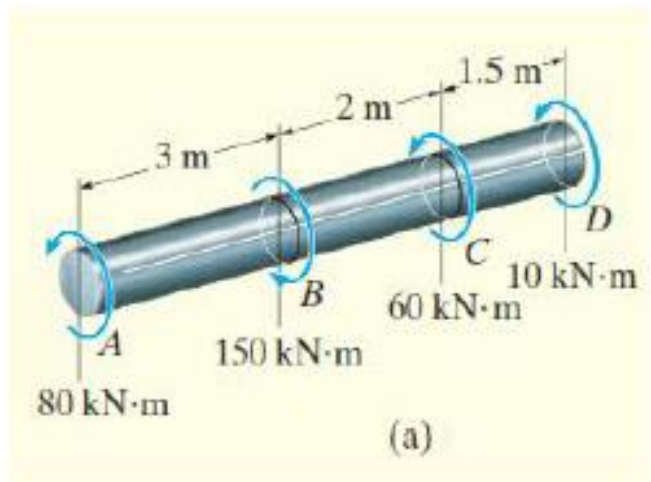
و برای هر نقطه واقع بر سطح داخلی لوله،

$$\rho = c_i = 0.04 \text{ m}$$

در نتیجه:

$$\tau_i = \frac{Tc_i}{J} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m} (0.04 \text{ m})}{5.796 (10^{-6}) \text{ m}^4} = 0.276 \text{ MPa}$$

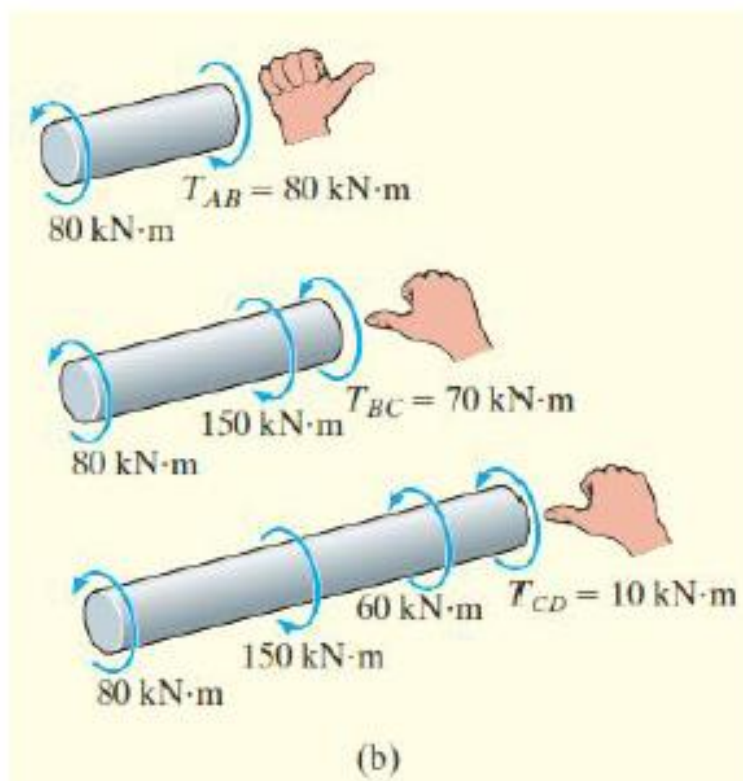
نتایج به دست آمده در شکل (c) نشان داده شده است.



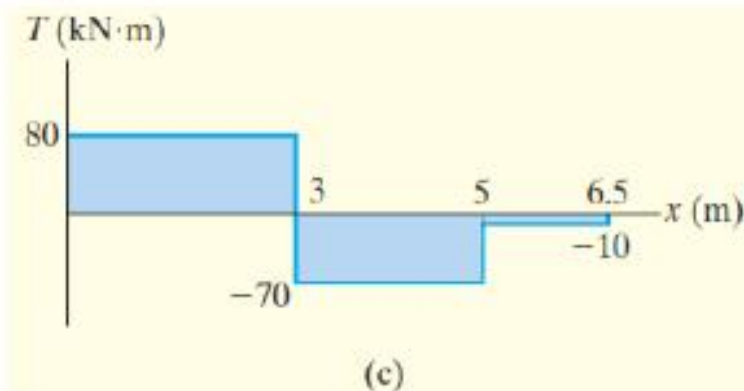
مثال ۳: زاویه پیچش انتهای A از محور مطابق شکل (a) را محاسبه کنید. همچنین دوران نقطه A را نسبت به C تعیین کنید.

قطر محور را مساوی با 200 mm و $G=75 \text{ GPa}$ فرض کنید.

حل:



محاسبه لنگرهای پیچی داخلی در محور: با مقطع زدن در سه ناحیه مختلف این محور، لنگرهای پیچشی در فواصل AB، BC و CD مطابق با شکل (b) به دست می آید. با توجه به علامت لنگرها، نمودار لنگر پیچشی در طول عضو، مطابق شکل (c) ترسیم می شود:



زاویه پیچش A: ممان اینرسی قطبی میله برابر است با:

$$J = \frac{\pi}{2}(0.1 \text{ m})^4 = 0.1571(10^{-3}) \text{ m}^4$$

دوران نقطه A نسبت به ابتدای محور D عبارت است از:

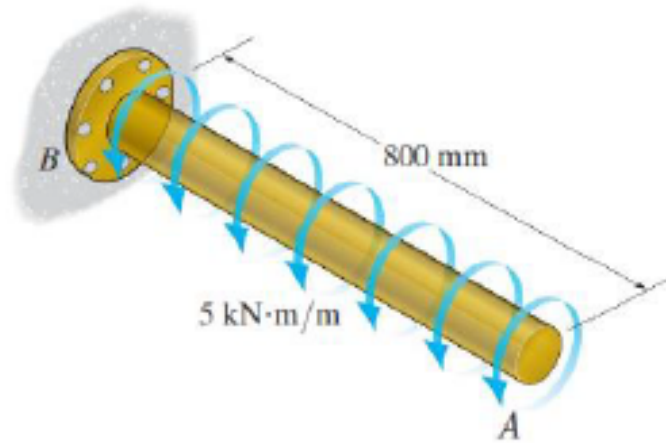
$$\phi_A = \sum \frac{TL}{JG} = \frac{80(10^3) \text{ N} \cdot \text{m} (3 \text{ m})}{(0.1571(10^{-3}) \text{ m}^4)(75(10^9) \text{ N/m}^2)} + \frac{-70(10^3) \text{ N} \cdot \text{m} (2 \text{ m})}{(0.1571(10^{-3}) \text{ m}^4)(75(10^9) \text{ N/m}^2)} + \frac{-10(10^3) \text{ N} \cdot \text{m} (1.5 \text{ m})}{(0.1571(10^{-3}) \text{ m}^4)(75(10^9) \text{ N/m}^2)}$$
$$\phi_A = 7.22(10^{-3}) \text{ rad}$$

زاویه پیچش A نسبت به C: با در نظر گرفتن پیچش دو قسمت AB و BC داریم:

$$\phi_{A/C} = \sum \frac{TL}{JG} = \frac{80(10^3) \text{ N} \cdot \text{m} (3 \text{ m})}{(0.1571(10^{-3}) \text{ m}^4)(75(10^9) \text{ N/m}^2)} + \frac{-70(10^3) \text{ N} \cdot \text{m} (2 \text{ m})}{(0.1571(10^{-3}) \text{ m}^4)(75(10^9) \text{ N/m}^2)}$$
$$\phi_{A/C} = 8.49(10^{-3}) \text{ rad}$$

۲) محور فولادی AB به قطر 80 mm تحت پیچش گسترده یکنواخت قرار گرفته است، زاویه پیچش انتهای A را نسبت B تعیین کنید.

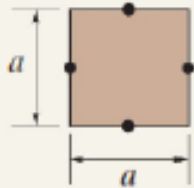
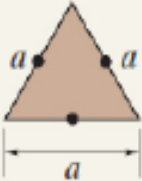
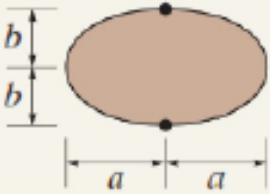
$$G=75 \text{ GPa}$$

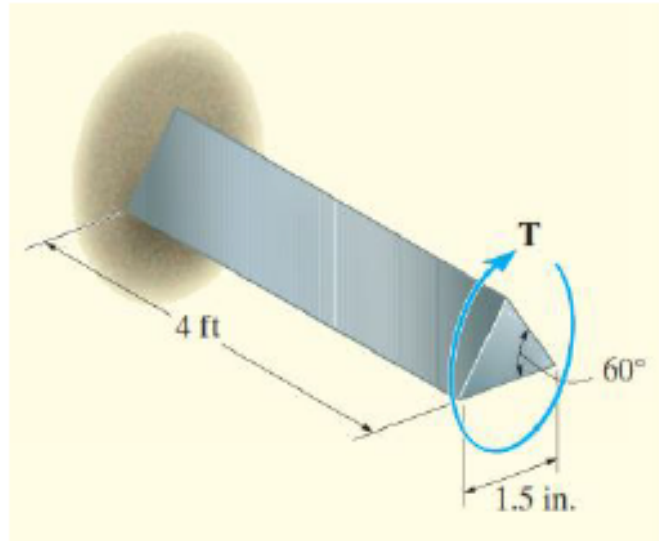


$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

پیچش مقاطع غیر دایره ای توپر

Shape of cross section	τ_{\max}	ϕ
<p>Square</p> 	$\frac{4.81 T}{a^3}$	$\frac{7.10 TL}{a^4 G}$
<p>Equilateral triangle</p> 	$\frac{20 T}{a^3}$	$\frac{46 TL}{a^4 G}$
<p>Ellipse</p> 	$\frac{2 T}{\pi a b^2}$	$\frac{(a^2 + b^2) TL}{\pi a^3 b^3 G}$



مثال ۷: محور آلومینیومی مطابق شکل، مقطعی به شکل مثلث متساوی الاضلاع دارد. اگر تنش برشی مجاز، $\tau_{allow} = 8 \text{ ksi}$ و زاویه پیچش محور به $\phi_{allow} = 0.02 \text{ rad}$ محدود باشد، بیشترین لنگر پیچشی قابل اعمال بر انتهای محور را تعیین کنید. لنگر پیچشی قابل اعمال بر محوری با مقطع دایره‌ای و ساخته شده از همین ماده، چقدر است؟

$$G = 3.7(10^6) \text{ lb/in}^2$$

$$\tau_{allow} = \frac{20T}{a^3}; \quad 8(10^3) \text{ lb/in}^2 = \frac{20T}{(1.5 \text{ in.})^3}$$

$$T = 1350 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$\phi_{allow} = \frac{46TL}{a^4 G_{al}}; \quad 0.02 \text{ rad} = \frac{46T(4 \text{ ft})(12 \text{ in./ft})}{(1.5 \text{ in.})^4 [3.7(10^6) \text{ lb/in}^2]}$$

$$T = 170 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

مقطع دایره‌ای: اگر بخواهیم مقطع دایره‌ای با همین مصالح و مشخصات مشابه بسازیم، شعاع مقطع دایره‌ای باید برابر باشد با:

$$A_{\text{circle}} = A_{\text{triangle}}; \quad \pi c^2 = \frac{1}{2} (1.5 \text{ in.}) (1.5 \sin 60^\circ)$$
$$c = 0.557 \text{ in.}$$

محدودیت تنش و زاویهٔ پیچش را برای مقطع دایره‌ای در نظر می‌گیریم:

$$\tau_{\text{allow}} = \frac{Tc}{J}; \quad 8(10^3) \text{ lb/in}^2 = \frac{T(0.557 \text{ in.})}{(\pi/2)(0.557 \text{ in.})^4}$$
$$T = 2170 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$
$$\phi_{\text{allow}} = \frac{TL}{JG_{\text{al}}}; \quad 0.02 \text{ rad} = \frac{T(4 \text{ ft})(12 \text{ in./ft})}{(\pi/2)(0.557 \text{ in.})^4 [3.7(10^6) \text{ lb/in}^2]}$$
$$T = 233 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

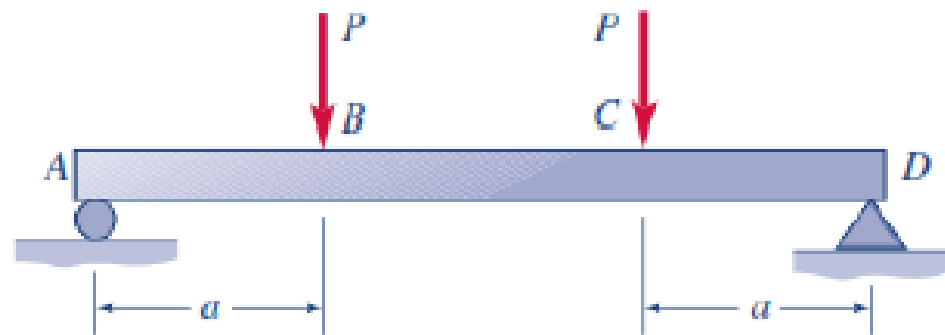
مقایسهٔ نتایج به‌دست آمده از مقاطع دایره‌ای و مثلثی، نشان می‌دهد که محور دایره‌ای می‌تواند 37% بیش‌تر از مقطع مثلثی پیچش تحمل کند.

$$(233-170)/170 * 100 = 37\%$$

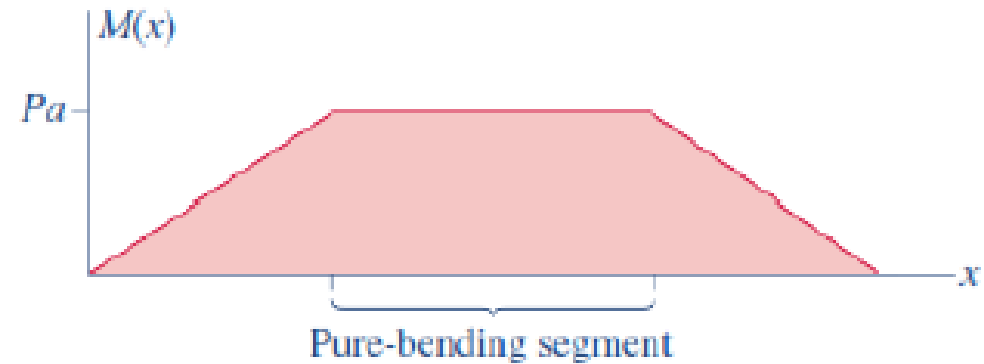
خمش

خمش خالص (pure bending)

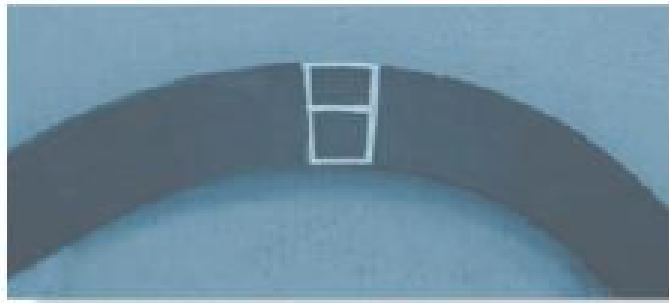
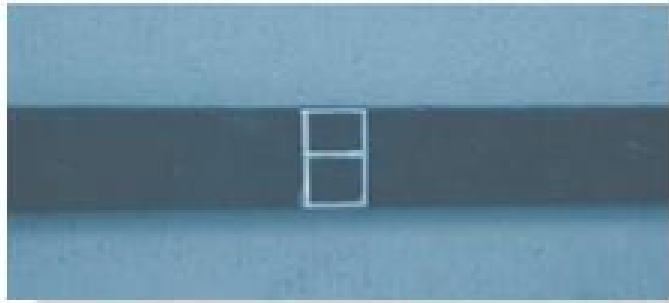
در هر مقطع از تیری که تحت اثر بارهای جانبی قرار گرفته است، در حالت کلی، نیروهای داخلی شامل نیروی برشی و لنگر خمشی ایجاد می‌شود. حالت خاصی که در مقطع تیر فقط لنگر خمشی اثر کند و نیروی برشی در آن صفر باشد، خمش خالص نامیده می‌شود. در شکل زیر، ناحیه بین دو بار متمرکز، تحت اثر خمش خالص قرار دارد.



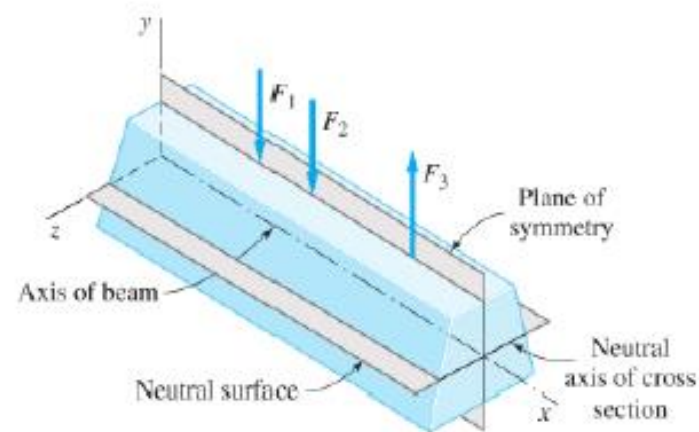
(a) Beam with symmetric loading.



(b) Bending-moment diagram.



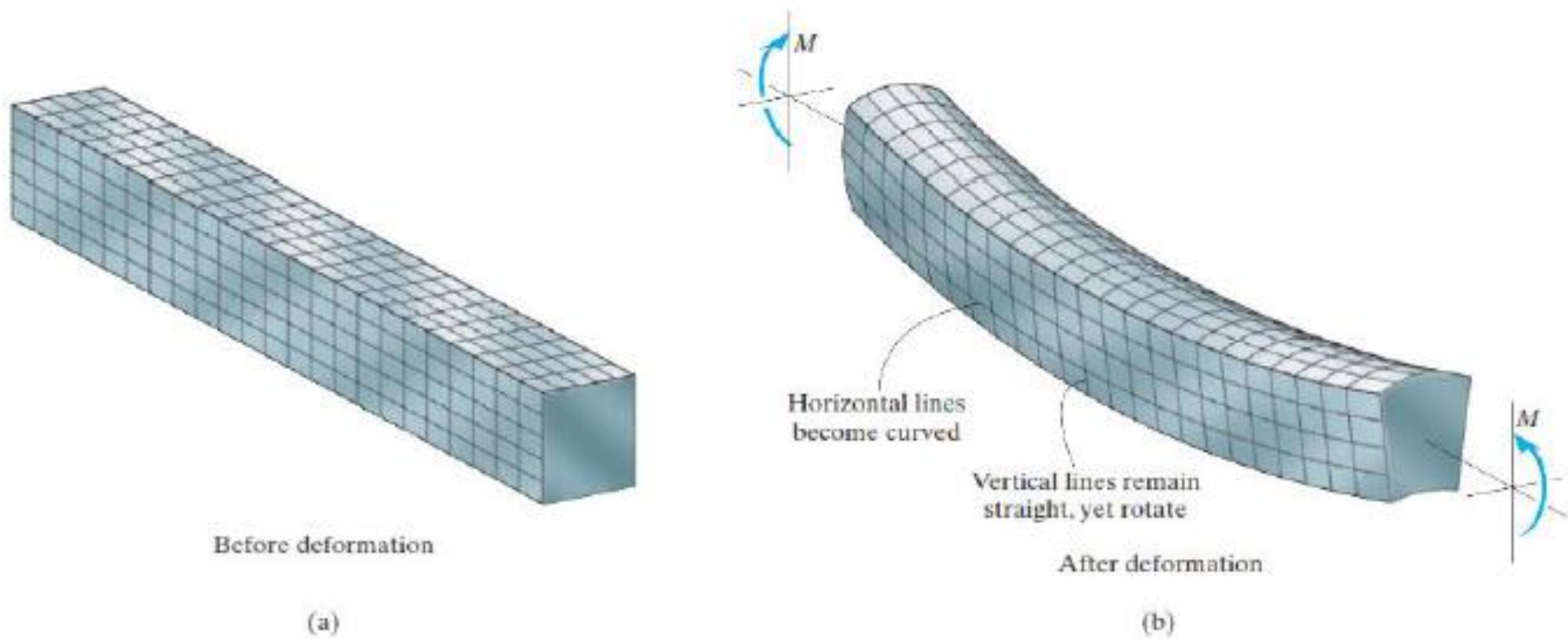
در این فصل، تنش‌ها و تغییر فرم‌های نسبی حاصل از خمش خالص بررسی می‌شود. برای دست یافتن به فرمول تنش، لازم است ابتدا تغییر شکل تیر ناشی از خمش مورد مطالعه قرار گیرد. برای این منظور، قطعه‌ای از یک میلهٔ لاستیکی با مقطع متقارن را در نظر می‌گیریم. همان‌طور که در شکل روبه‌رو مشاهده می‌گردد، در اثر اعمال لنگر خمشی بر این نمونه، تارهای قسمت فوقانی، تحت کشش، دچار افزایش طول می‌شود و از طول تارهای قسمت تحتانی آن، تحت فشار، کاسته می‌شود. در این بین، می‌توان خطی را یافت که طول آن تغییر نمی‌کند. صفحه‌ای که از امتداد این خط عبور می‌کند، صفحهٔ خنثی نامیده می‌شود و محل تلاقی این صفحه را با هر مقطع عمودی از تیر، محور خنثی می‌نامند. در شکل زیر، صفحهٔ تقارن، محور طولی تیر، محور خنثی و صفحهٔ خنثی در یک تیر تحت خمش خالص، نشان داده شده است:



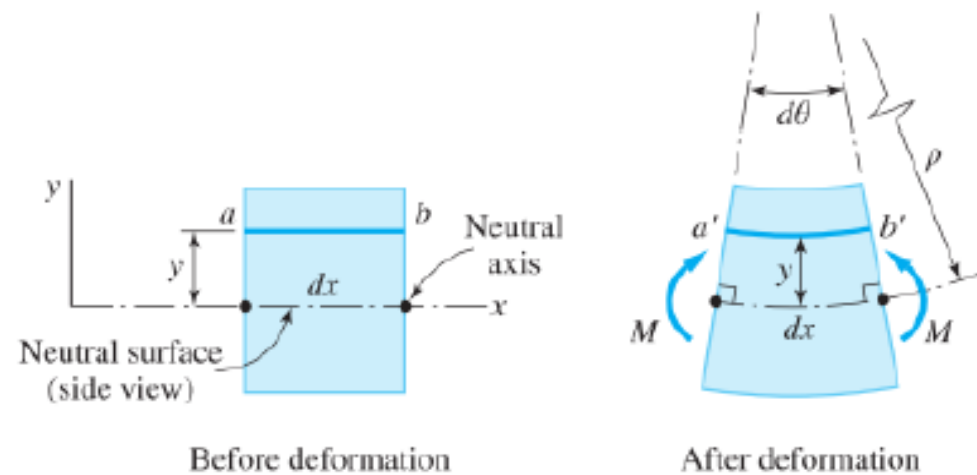
در این فصل، فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم:

- ✓ بارگذاری به‌صورت تدریجی بر تیر اثر می‌کند و تکان یا ضربه‌ای به‌هنگام بارگذاری وارد نمی‌شود.
- ✓ تیرها تحت بارگذاری پایدارند و دچار کماتش نمی‌شوند.
- ✓ مقاطع صفحه‌ای عمود بر محور تیر، پس از خمش نیز به‌صورت صفحه‌ای باقی می‌مانند.
- ✓ تغییرات تغییر فرم نسبی در تارهای طولی موازی صفحهٔ خنثی، خطی است؛ به عبارت دیگر، متناسب با فاصله از محور خنثی، تغییر فرم نسبی افزایش یا کاهش می‌یابد.

✓ همان‌طور که در شکل زیر دیده می‌شود، خطوط افقی به‌صورت منحنی تغییر شکل می‌دهند ولی خطوط عمودی مستقیم باقی‌مانده، می‌چرخند.



برای محاسبه تغییر فرم نسبی ایجاد شده در اثر لنگر خمشی، جزء کوچکی از این تیر را به طول dx مطابق شکل زیر، در نظر می‌گیریم. در اثر اعمال لنگر خمشی مثبت M ، این جزء، دچار تغییر فرم می‌شود به طوری که طول خط واقع در صفحه خنثی تغییری نمی‌کند اما خطوط واقع در زیر آن، بلندتر و خطوط واقع در روی آن، کوتاه‌تر می‌شوند.



اندازه dx را می‌توان بر حسب شعاع انحنای ρ و زاویه بین لبه‌های جزء $d\theta$ بیان کرد:

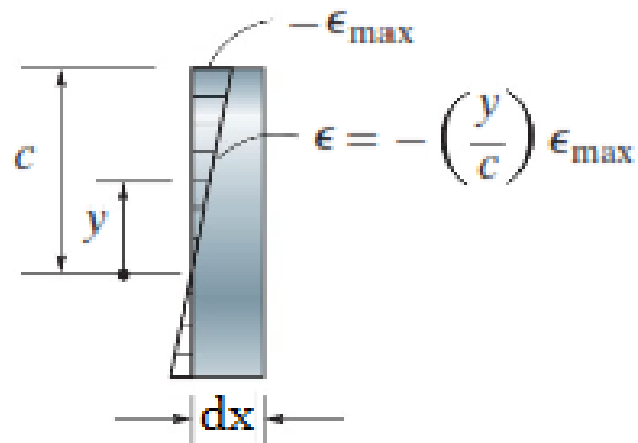
$$dx = \rho d\theta$$

طول کاهش یافته $a'b'$ ، به فاصله y از صفحه خنثی نیز به همین ترتیب برابر است با:

$$\overline{a'b'} = (\rho - y) d\theta$$

از آن جا که طول اولیه آن ab ، یا dx برابر بوده است، تغییر فرم نسبی در فاصله y نسبت به صفحه خنثی برابر است با:

$$\epsilon = \frac{\overline{a'b'} - \overline{ab}}{\overline{ab}} = \frac{(\rho - y) d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = -\frac{y}{\rho}$$



$$\frac{\epsilon}{\epsilon_{\max}} = -\left(\frac{y/\rho}{c/\rho}\right)$$

$$\epsilon = -\left(\frac{y}{c}\right) \epsilon_{\max}$$

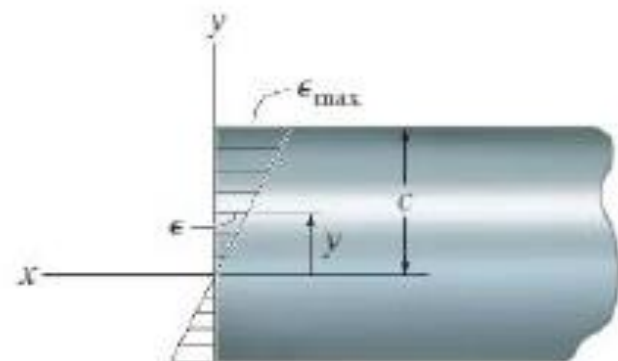
Normal strain distribution

فرمول خمش

در این بخش، در پی یافتن معادله‌ای هستیم که رابطه بین توزیع تنش در مقطع تیر و لنگر خمشی وارد بر آن را بیان کند. با فرض آن که رفتار مصالح به کار رفته به صورت ارتجاعی خطی باشد، با توجه به رابطه هوک ($\sigma = E\epsilon$)، از تغییرات خطی تغییر فرم نسبی، می‌توان نتیجه گرفت که تغییرات تنش نیز بر روی مقطع باید خطی باشد؛ بنابراین خواهیم داشت:

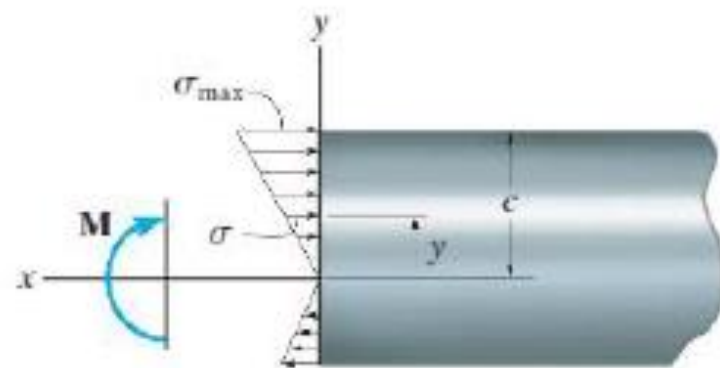
$$\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{\max}$$

این معادله، توزیع تنش بر روی سطح مقطع تیر را بیان می‌کند. برای لنگر خمشی $+M$ که در جهت $+z$ عمل می‌کند، به‌ازای مقادیر مثبت y ، مقدار σ منفی (تنش فشاری) به دست می‌آید و مقادیر منفی y ، منجر به مقادیر مثبت برای σ (تنش کششی) می‌شود.



Normal strain variation
(profile view)

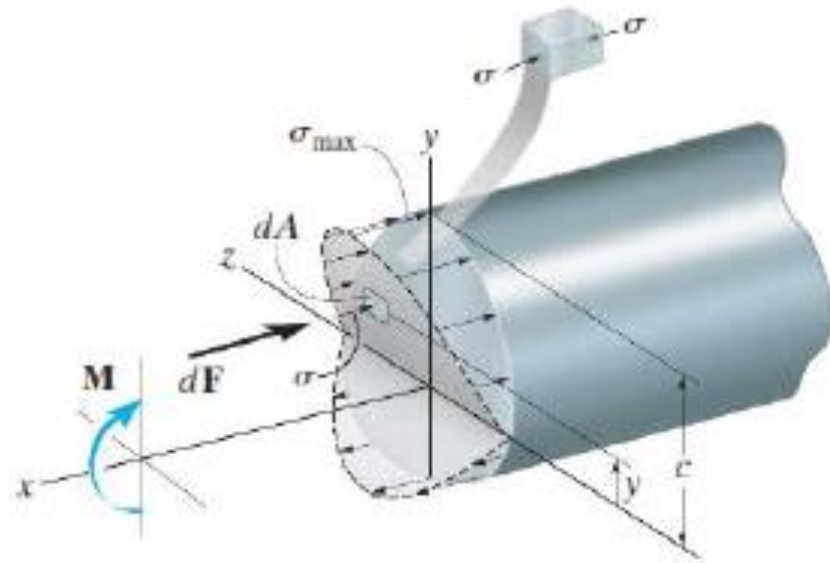
(a)



Bending stress variation
(profile view)

موقعیت محور خنثی

برای تعیین موقعیت محور خنثی روی مقطع تیر، برآیند نیروهای حاصل از توزیع تنش بر روی مقطع را مساوی صفر قرار می‌دهیم. با توجه به شکل مقابل، نیروی $dF = \sigma dA$ روی جزء سطح دلخواه dA اثر می‌کند؛ از این رو می‌توان نوشت:



Bending stress variation

$$\begin{aligned} F_R = \Sigma F_x; \quad 0 &= \int_A dF = \int_A \sigma dA \\ &= \int_A -\left(\frac{y}{c}\right) \sigma_{\max} dA \\ &= \frac{-\sigma_{\max}}{c} \int_A y dA \end{aligned}$$

$$\int_A y dA = 0$$

چون σ_{\max}/c صفر نیست، پس:

به عبارت دیگر، گشتاور اول سطح مقطع عضو باید حول محور خنثی صفر باشد. این شرط تنها در صورتی می‌تواند برقرار باشد که محور خنثی بر محور افقی که از مرکز سطح مقطع عبور می‌کند، منطبق باشد.

لنگر خمشی

لنگر داخلی M باید با لنگر پدید آمده از توزیع تنش حول محور خمشی برابر باشد. مطابق شکل فوق، لنگر dF حول محور خمشی عبارت است از: $dM = y dF$. و چون: $dF = \sigma dA$ ، با توجه به رابطه $\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{max}$ ، برای کل سطح مقطع می‌توان نوشت:

$$(M_R)_z = \Sigma M_z; \quad M = \int_A y dF = \int_A y (\sigma dA) = \int_A y \left(\frac{y}{c} \sigma_{max} \right) dA$$

یا:

$$M = \frac{\sigma_{max}}{c} \int_A y^2 dA$$

انتگرال فوق بیان گر گشتاور اینرسی سطح مقطع حول محور خمشی است و مقدار آن را با I نشان می‌دهیم. در نتیجه، معادله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

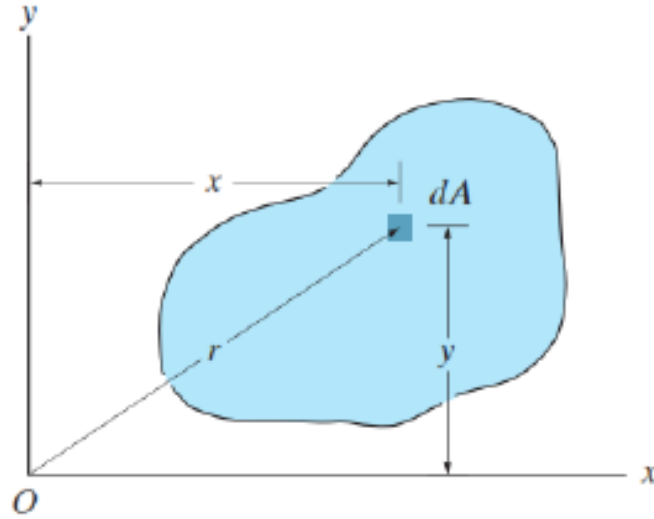
$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I}$$

همچنین، تنش عمودی در یک نقطه میانی به فاصله y از محور خمشی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

گشتاور اینرسی سطح

این کمیت، خاصیت هندسی است که حول محورهای x و y به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$I_x = \int_A y^2 dA$$

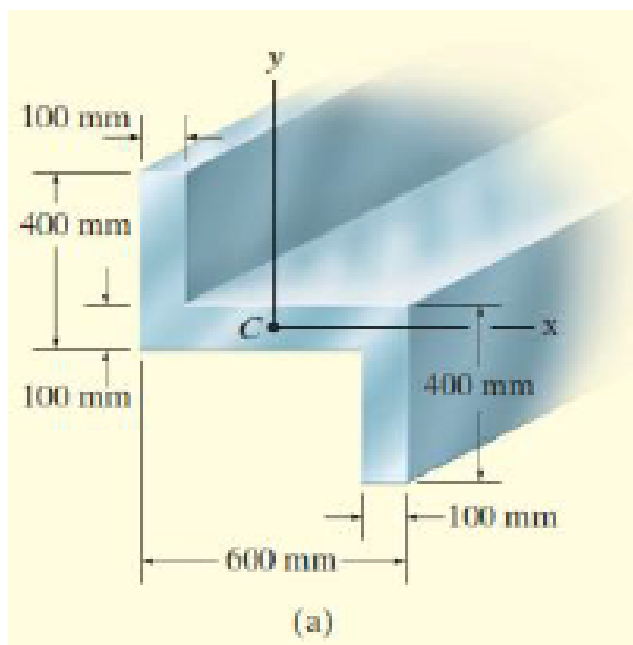
$$I_y = \int_A x^2 dA$$

سطوح مرکب

بسیاری از سطح مقطع‌ها از تعدادی شکل ساده‌تر متصل به هم تشکیل شده‌اند. برای تعیین گشتاور اینرسی چنین سطح مقطعی حول یک محور مشخص، ابتدا لازم است سطح را به بخش‌های ترکیب شده‌اش تقسیم کرد و فاصله عمودی از آن محور تا محور موازی آن که از مرکز سطح هر بخش عبور می‌کند، مشخص نمود. گشتاور اینرسی هر بخش نسبت به محور تعیین شده از روابط زیر به دست می‌آید:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2$$

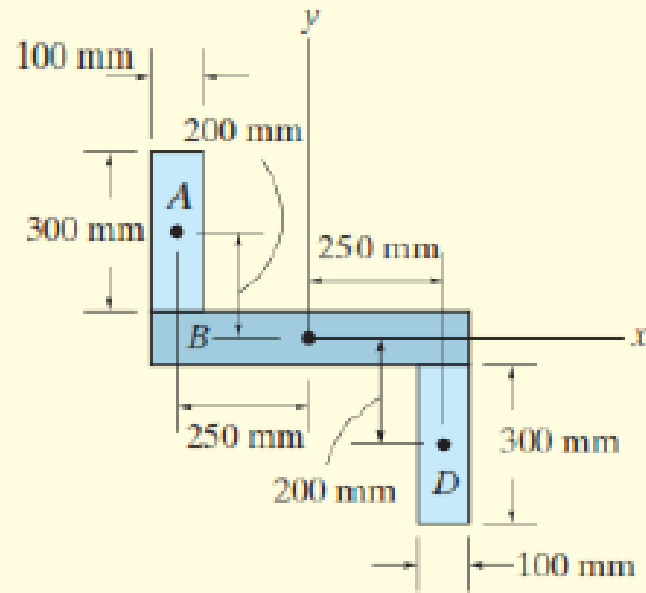


مثال ۲: گشتاور اینرسی مقطع نشان داده شده در شکل (a) را حول محورهای x و y که از مرکز سطح آن عبور می کنند، به دست آورید.

حل: مقطع نشان داده شده را به سه مستطیل A ، B و D تقسیم می کنیم و با توجه به جدول فوق، گشتاور اینرسی هر کدام را حول محورهایی که از مرکز سطح آن ها عبور می کند، به دست می آوریم:

برای مستطیل های A و D داریم:

برای مستطیل‌های A و D داریم:



(b)

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2$$
$$= 1.425(10^9) \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2$$
$$= 1.90(10^9) \text{ mm}^4$$

برای مستطیل B نیز می‌توان نوشت:

$$I_x = \frac{1}{12}(600)(100)^3 = 0.05(10^9) \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(100)(600)^3 = 1.80(10^9) \text{ mm}^4$$

با جمع کردن مقادیر فوق، گشتاور اینرسی مقطع نسبت به محورهای x و y که از مرکز سطح عبور می کنند، به دست می آید:

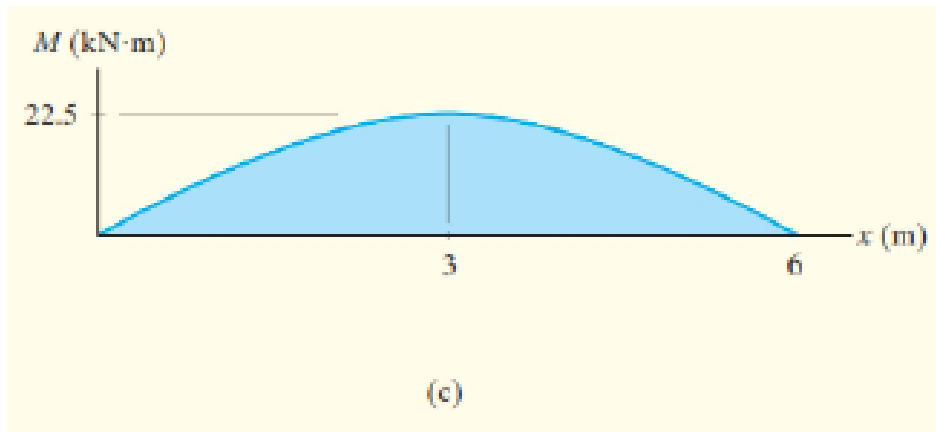
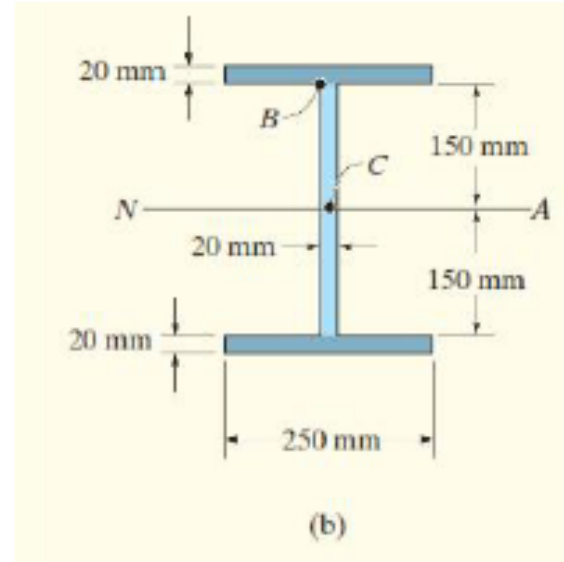
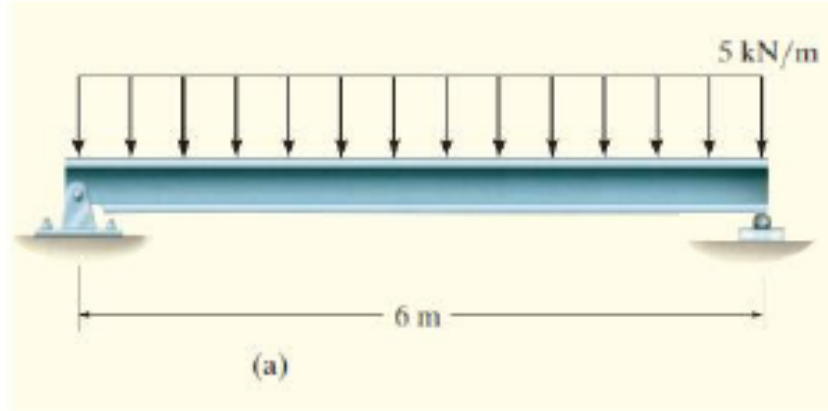
$$I_x = 2[1.425(10^9)] + 0.05(10^9)$$

$$= 2.90(10^9) \text{ mm}^4$$

$$I_y = 2[1.90(10^9)] + 1.80(10^9)$$

$$= 5.60(10^9) \text{ mm}^4$$

مثال ۳: تیر ساده نشان داده شده در شکل (a) دارای مقطع مطابق شکل (b) است. حداکثر تنش خمشی مطلق را در تیر به دست آورید و توزیع تنش روی سطح مقطع را در این موقعیت ترسیم کنید. همچنین، تنش در نقطه B را تعیین کنید.



$$\begin{aligned}
 I &= \Sigma(\bar{I} + Ad^2) \\
 &= 2 \left[\frac{1}{12} (0.25 \text{ m})(0.020 \text{ m})^3 + (0.25 \text{ m})(0.020 \text{ m})(0.160 \text{ m})^2 \right] \\
 &\quad + \left[\frac{1}{12} (0.020 \text{ m})(0.300 \text{ m})^3 \right] \\
 &= 301.3(10^{-6}) \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

تنش ماکزیمم:

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I}; \quad \sigma_{\max} = \frac{22.5(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.170 \text{ m})}{301.3(10^{-6}) \text{ m}^4} = 12.7 \text{ MPa}$$

تنش در نقطه B: به همین ترتیب، با قرار دادن y نقطه B در فرمول خمش، تنش در آن نقطه حاصل می‌شود.

$$\sigma_B = -\frac{My_B}{I}; \quad \sigma_B = -\frac{22.5(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.150 \text{ m})}{301.3(10^{-6}) \text{ m}^4} = -11.2 \text{ MPa}$$

مثال حل شده

1

A 850-lb force is applied to a 0.15-in. diameter nickel wire having a yield strength of 45,000 psi and a tensile strength of 55,000 psi. Determine (a) whether the wire will plastically deform and (b) whether the wire will experience necking.

Solution: (a) First determine the stress acting on the wire:

$$\sigma = F/A = 850 \text{ lb} / (\pi/4)(0.15 \text{ in.})^2 = 48,100 \text{ psi}$$

Because σ is greater than the yield strength of 45,000 psi, the wire will plastically deform.

(b) Because σ is less than the tensile strength of 55,000 psi, no necking will occur.

2

A force of 100,000 N is applied to a 10 mm × 20 mm iron bar having a yield strength of 400 MPa and a tensile strength of 480 MPa. Determine (a) whether the bar will plastically deform and (b) whether the bar will experience necking.

Solution: (a) First determine the stress acting on the wire:

$$\sigma = F/A = 100,000 \text{ N} / (10 \text{ mm})(20 \text{ mm}) = 500 \text{ N/mm}^2 = 500 \text{ MPa}$$

Because σ is greater than the yield strength of 400 MPa, the wire will plastically deform.

(b) Because σ is greater than the tensile strength of 480 MPa, the wire will also neck.

3

Calculate the maximum force that a 0.2-in. diameter rod of Al_2O_3 , having a yield strength of 35,000 psi, can withstand with no plastic deformation. Express your answer in pounds and newtons.

Solution: $F = \sigma A = (35,000 \text{ psi})(\pi/4)(0.2 \text{ in.})^2 = 1100 \text{ lb}$

$$F = (1100 \text{ lb})(4.448 \text{ N/lb}) = 4891 \text{ N}$$

4

A force of 20,000 N will cause a 1 cm × 1 cm bar of magnesium to stretch from 10 cm to 10.045 cm. Calculate the modulus of elasticity, both in GPa and psi.

Solution: The strain ϵ is $\epsilon = (10.045 \text{ cm} - 10 \text{ cm})/10 \text{ cm} = 0.0045 \text{ cm/cm}$

The stress σ is $\sigma = 20,000 \text{ N} / (10 \text{ mm})(10 \text{ mm}) = 200 \text{ N/mm}^2 = 200 \text{ MPa}$

$$E = \sigma/\epsilon = 200 \text{ MPa} / 0.0045 \text{ cm/cm} = 44,444 \text{ MPa} = 44.4 \text{ GPa}$$

$$E = (44,444 \text{ MPa})(145 \text{ psi/MPa}) = 6.44 \times 10^6 \text{ psi}$$

5

A 0.4-in. diameter, 12-in. long titanium bar has a yield strength of 50,000 psi, a modulus of elasticity of 16×10^6 psi, and Poisson's ratio of 0.30. Determine the length and diameter of the bar when a 500-lb load is applied.

Solution: The stress is $\sigma = F/A = 500 \text{ lb}/(\pi/4)(0.4 \text{ in.})^2 = 3,979 \text{ psi}$

The applied stress is much less than the yield strength; therefore Hooke's law can be used.

The strain is $\varepsilon = \sigma/E = 3,979 \text{ psi} / (16 \times 10^6 \text{ psi}) = 0.00024868 \text{ in./in.}$

$$\frac{l_f - l_o}{l_o} = \frac{l_f - 12 \text{ in.}}{12 \text{ in.}} = 0.00024868 \text{ in./in.}$$

$$l_f = 12.00298 \text{ in.}$$

From Poisson's ratio, $\mu = -\varepsilon_{\text{lat}} / \varepsilon_{\text{long}} = 0.3$

$$\varepsilon_{\text{lat}} = - (0.3)(0.00024868) = - 0.0000746 \text{ in./in.}$$

$$\frac{d_f - d_o}{d_f} = \frac{d_f - 0.4 \text{ in.}}{0.4} = - 0.0000746 \text{ in./in.}$$

$$d_f = 0.39997 \text{ in.}$$